



Editora
UFPel

Série Investigação Filosófica
Textos Seleccionados de
Lógica

Danilo Fraga Dantas
Rodrigo Reis Lastra Cid
(Organizadores)

DISSERTATIO
FILOSOFIA

TEXTOS SELECCIONADOS DE LÓGICA

SÉRIE INVESTIGAÇÃO FILOSÓFICA

TEXTOS SELECIONADOS DE LÓGICA

Rodrigo Reis Lastra Cid
Danilo Fraga Dantas
(Organizadores)



Pelotas, 2020

REITORIA

Reitor: Pedro Rodrigues Curi Hallal

Vice-Reitor: Luís Isaias Centeno do Amaral

Chefe de Gabinete: Taís Ullrich Fonseca

Pró-Reitor de Graduação: Maria de Fátima Cossio

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação: Flávio Fernando Demarco

Pró-Reitor de Extensão e Cultura: Francisca Ferreira Michelin

Pró-Reitor de Planejamento e Desenvolvimento: Otávio Martins Peres

Pró-Reitor Administrativo: Ricardo Hartlebem Peter

Pró-Reitor de Infraestrutura: Julio Carlos Balzano de Mattos

Pró-Reitor de Assuntos Estudantis: Mário Renato de Azevedo Jr.

Pró-Reitor de Gestão Pessoas: Sérgio Batista Christino

CONSELHO EDITORIAL DA EDITORA DA UFPEL

Presidente do Conselho Editorial: João Luis Pereira Ourique

Representantes das Ciências Agronômicas: Guilherme Albuquerque de Oliveira Cavalcanti

Representantes da Área das Ciências Exatas e da Terra: Adelir José Strieder

Representantes da Área das Ciências Biológicas: Marla Piumbini Rocha

Representante da Área das Engenharias e Computação: Darci Alberto Gatto

Representantes da Área das Ciências da Saúde: Claiton Leoneti Lencina

Representante da Área das Ciências Sociais Aplicadas: Célia Helena Castro Gonsales

Representante da Área das Ciências Humanas: Charles Pereira Pennaforte

Representantes da Área das Linguagens e Artes: Josias Pereira da Silva

EDITORIA DA UFPEL

Chefia: João Luis Pereira Ourique (Editor-chefe)

Seção de Pré-produção: Isabel Cochrane (Administrativo)

Seção de Produção: Gustavo Andrade (Administrativo)

Anelise Heidrich (Revisão)

Ingrid Fabiola Gonçalves (Diagramação)

Seção de Pós-produção: Madelon Schimmelpfennig Lopes (Administrativo)

Morgana Riva (Assessoria)



GRUPO DE PESQUISA INVESTIGAÇÃO FILOSÓFICA (UNIFAP/CNPq)

O Grupo de Pesquisa Investigação Filosófica (DPG/CNPq) foi constituído por pesquisadores que se interessam pela investigação filosófica nas mais diversas áreas de interesse filosófico. O grupo foi fundado em 2010, como grupo independente, e se oficializou como grupo de pesquisa da Universidade Federal do Amapá em 2019.

MEMBROS PERMANENTES DO GRUPO

Aluízio de Araújo Couto Júnior
Bruno Aislã Gonçalves dos Santos
Cesar Augusto Mathias de Alencar
Daniel Schiochett
Daniela Moura Soares
Everton Miguel Puhl Maciel
Guilherme da Costa Assunção Cecílio
Kherian Galvão Cesar Gracher
Luiz Helvécio Marques Segundo
Luiz Maurício Bentim da Rocha Menezes
Mayra Moreira da Costa
Paulo Roberto Moraes de Mendonça
Pedro Merlussi
Rafael César Pitt
Renata Ramos da Silva
Rodrigo Alexandre de Figueiredo
Rodrigo Reis Lastra Cid
Sajid Salles
Tiago Luís Teixeira de Oliveira

Mais informações no site: <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/513418>

Série Investigação Filosófica

A Série Investigação Filosófica, uma iniciativa do **Núcleo de Ensino e Pesquisa em Filosofia** do Departamento de Filosofia da UFPel e do **Grupo de Pesquisa Investigação Filosófica** do Departamento de Filosofia da UNIFAP, sob o selo editorial do NEPFil online e da Editora da Universidade Federal de Pelotas, tem por objetivo precípuo a publicação da tradução para a língua portuguesa de textos selecionados a partir de diversas plataformas internacionalmente reconhecidas, tal como a *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (<https://plato.stanford.edu/>), por exemplo. O objetivo geral da série é disponibilizar materiais bibliográficos relevantes tanto para a utilização enquanto material didático quanto para a própria investigação filosófica.

EDITORES DA SÉRIE

Rodrigo Reis Lastra Cid (GIF/UNIFAP)

Juliano Santos do Carmo (NEPFIL/UFPEL)

COMISSÃO TÉCNICA

Juliano Santos do Carmo (Diagramador/Capista)

Danilo Jose Ribeiro de Oliveira (Diagramador)

Bruno Borges Moura (Diagramador)

ORGANIZADORES DO VOLUME

Danilo Fraga Dantas (UFSM)

Rodrigo Reis Lastra Cid (UNIFAP)

TRADUTORES

Danilo Jose Ribeiro de Oliveira (UNIFAP)

Elton Luiz Rasch (UFSM)

Heitor Helder Siqueira Campos (UFPE)

Rodrigo Reis Lastra Cid (UNIFAP)

REVISORES

Danilo Fraga Dantas (UFSM)

Frank Thomas Sauter (UFSM)

João Marcos de Almeida (UFRN)

Márcio Moretto Ribeiro (USP)

Rodrigo Reis Lastra Cid (UNIFAP)

Rogério Passos Severo (UFRGS)

Acesse o acervo completo em: <https://wp.ufpel.edu.br/nepfil/serie-investigacao-filosofica/>

© **Série Investigação Filosófica, 2020.**

Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Filosofia
Núcleo de Ensino e Pesquisa em Filosofia
Editora da Universidade Federal de Pelotas

Universidade Federal do Amapá
Departamento de Filosofia
Grupo de Pesquisa Investigação Filosófica

NEPfil online

Rua Alberto Rosa, 154 – CEP 96010-770 – Pelotas/RS

Os direitos autorais estão de acordo com a Política Editorial do NEPfil online. As revisões ortográficas e gramaticais foram realizadas pelos tradutores e revisores. A autorização para a tradução dos verbetes da *Stanford Encyclopedia of Philosophy* neste volume foi obtida pelo *Grupo de Pesquisa Investigação Filosófica*.

Primeira publicação em 2020 por NEPfil online e Editora da UFPel.

Dados Internacionais de Catalogação

N123 Textos selecionados de lógica.
[recurso eletrônico] Organizadores: Rodrigo Reis Lastra Cid; Danilo Fraga Dantas – Pelotas: NEPFIL Online, 2020.
140p. - (Série Investigação Filosófica).
Modo de acesso: Internet
<wp.ufpel.edu.br/nepfil>
ISBN: 978-65-86440-18-8

1. Lógica. 2. Filosofia. I. Cid, Rodrigo Reis Lastra. II. Dantas, Danilo Fraga.

COD 100



Para maiores informações, por favor visite nosso site wp.ufpel.edu.br/nepfil

SUMÁRIO

Sobre a Série Investigação Filosófica	09
Lógica, de Aristóteles a Zalta	11
<i>Danilo Fraga Dantas</i>	
<i>Rodrigo Reis Lastra Cid</i>	
(I) A Lógica de Aristóteles	19
<i>Robin Smith</i>	
1. Introdução	20
2. As Obras Lógicas de Aristóteles: O <i>Organon</i>	21
3. O Assunto da Lógica: “Silogismos”	21
3.1 Indução e Dedução	22
3.2 Deduções Aristóteles e Argumentos Contemporâneos Válidos	22
4. Premissas: As Estruturas das Asserções	23
4.1 Termos	24
4.2 Afirmações, Negações e Contradições	25
4.3 Todo, Algum e Nenhum	25
4.3.1 O “Quadrado de Oposições”	26
4.3.2 Algumas Abreviações Convenientes	27
5. A Silogística	27
5.1 As Figuras	28
5.2 Métodos de Prova: Deduções “Perfeitas”, Conversão, Redução	28
5.3 Desaprovação: Contraexemplos e Termos	31
5.4 As Deduções nas Figuras (“Modos”)	32
5.5 Resultados Metalógicos	33
5.6 Silogismos com Modalidades	34
5.6.1 As Definições de Modalidades	35
5.6.2 A Abordagem Geral de Aristóteles	35
5.6.3 Conversões Modais	36
5.6.4 Silogismos com Premissas Necessárias	37

5.6.5 Combinações NA/AN: O Problema das “Duas Barbaras” e Outras Dificuldades	38
6. Demonstrações e Ciências Demonstrativas	38
6.1 As Ciências Aristotélicas	39
6.2 O Problema do Regresso	40
6.3 A Solução de Aristóteles: “Em algum momento isso chega ao fim”	42
6.4 O Conhecimento dos Primeiros Princípios: <i>Nous</i>	42
7. Definições	44
7.1 Definições e Essências	44
7.2 <i>Species</i> , <i>Genus</i> , e <i>Differentia</i>	45
7.3 As Categorias	46
7.4 O Método de Divisão	50
7.5 Definição e Demonstração	51
8. Argumentos Dialéticos e a Arte da Dialética	52
8.1 Premissas Dialéticas: O Significado de <i>Endoxos</i>	52
8.2 Os Dois Elementos da Arte da Dialética	53
8.2.1 O “Sistema Lógico” dos <i>Tópicos</i>	54
8.2.2 Os <i>Topoi</i>	55
8.3 Os Usos de Dialético e Argumento Dialético	55
8.3.1 Dialética da Ginástica	55
8.3.2 Dialética que Põe à Prova	56
8.3.3 Dialética e Filosofia	57
9. Dialética e Retórica	58
10. Argumentos Sofísticos	58
11. Não Contradição e Metafísica	60
12. Tempo e Necessidade: A Batalha Naval	61
13. Glossário da Terminologia Aristotélica	62
Referências	64
(II) Lógica Clássica	68
<i>Stewart Shapiro</i>	
<i>Teresa Kouri Kissel</i>	

1. Introdução	69
2. Linguagem	72
2.1 Blocos Constitutivos	72
2.2 Fórmulas Atômicas	74
2.3 Fórmulas Compostas	74
2.4 Características da Sintaxe	74
3. Dedução	80
4. Semântica	90
5. Meta-Teoria	95
6. A Única Lógica Certa?	104
Referências	106
Leitura Adicional	107
(III) Lógica Modal	108
<i>James Garson</i>	
1. O que é a Lógica Modal?	109
2. Lógicas Modais	109
3. Lógicas Deônticas	112
4. Lógicas Temporais	113
5. Lógicas Condicionais	114
6. Semântica dos Mundos Possíveis	115
7. Axiomas Modais e Condições sobre Enquadramentos	116
8. Mapa das Relações entre Lógicas Modais	118
9. O Axioma geral	120
10. Lógicas da Demonstrabilidade	122
11. Lógica Modal Avançada	124
12. Bissimulação	126
13. Quantificadores na Lógica Modal	128
Referências	133
Sobre Tradutores e Revisores	137

SOBRE A SÉRIE INVESTIGAÇÃO FILOSÓFICA

Este livro marca o início da *Série Investigação Filosófica*. Uma série de livros de traduções de textos de plataformas internacionalmente reconhecidas (tais como os verbetes da *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, por exemplo), que possa servir tanto como material didático para os professores das diferentes sub-áreas e níveis da Filosofia quanto como material de estudo para o desenvolvimento pesquisas relevantes na área. Nós, professores, sabemos o quão difícil é encontrar bons materiais em português para indicarmos. E há uma certa deficiência na graduação brasileira de filosofia, principalmente em localizações menos favorecidas, com relação ao conhecimento de outras línguas, como o inglês e o francês. Tentamos, então, suprir essa deficiência, ao introduzirmos traduções de textos importantes ao público de língua portuguesa, sem nenhuma finalidade comercial e meramente pela glória da filosofia.

Conforme dissemos, o objetivo deste livro é servir de material didático para os professores de filosofia em língua portuguesa. O presente volume é constituído de três traduções de verbetes importantes sobre lógica, da Enciclopédia de Filosofia da Stanford: (1) A Lógica de Aristóteles, (2) Lógica Clássica, (3) Lógica Modal. É claro que há muitos outros verbetes relevantes nessa temática, mas seria impossível fazer um livro com mais ou menos este tamanho, se adicionássemos todos os verbetes essenciais. Assim, fizemos uma seleção, para um primeiro livro; mas dois outros livros sobre lógica, tanto sobre paradoxos lógicos quanto sobre lógicas não clássicas, já estão sendo organizados por outros membros de nosso grupo.

As presentes traduções foram realizadas por filósofos ou por estudantes de filosofia supervisionados e revisadas por especialistas na área. Todas as traduções de verbetes da *Stanford* foram autorizadas pelo Prof. Dr. Edward Zalta, editor da Enciclopédia de Filosofia da Stanford; por isso o agradecemos imensamente. Sua disposição para ajudar brinda os países de língua portuguesa com um material filosófico de excelência, que será para sempre disponibilizado gratuitamente no site do NEPfil online e Editora da Universidade Federal de Pelotas (Editora UFPel), dado o nosso maior princípio se fundar na ideia de conhecimento livre e a nossa maior intenção ser o desenvolvimento da filosofia

em língua portuguesa e do seu ensino. Aproveitamos o ensejo para agradecer também ao editor do NEPFil online/UFPel, na figura do Prof. Dr. Juliano do Carmo, que apoiou nosso projeto desde o início. Agradecemos também a todos os organizadores, tradutores e revisores, que participam de nosso projeto. Sem sua dedicação voluntária, nosso trabalho não teria sido possível. Esperamos, com o início desta coleção, abrir as portas para o crescimento desse projeto de tradução e trabalharmos em conjunto pelo crescimento da filosofia em português.

Deixamos vocês com a excelente introdução do Prof. Dr. Danilo Fraga Dantas sobre a nossa intenção neste livro.

Prof. Dr. Rodrigo Reis Lastra Cid
Prof. Dr. Juliano do Carmo
Editores da Série Investigação Filosófica

Lógica, de Aristóteles a Zalta

Considere as seguintes afirmações:

1. Aristóteles é o lógico mais influente da história da humanidade.
2. O século XX foi o século mais importante para a história da lógica.

As afirmações (1) e (2) não são contrárias. No jargão dos lógicos, isso quer dizer que elas podem ser ambas verdadeiras. Mas como eu sei que (1) e (2) podem ser ambas verdadeiras? Eu sei que (1) e (2) podem ser ambas verdadeiras porque elas, de fato, o são e é um princípio de lógica modal que o que é o caso é possível ($A \supset \Diamond A$, veja adiante).

Não creio que alguém duvide da formidável influência que tratados de lógica de Aristóteles exercem sobre pensamento ocidental. Para exemplificar a grande impressão que os escritos de Aristóteles exerciam nos filósofos, mesmo dois mil anos após sua morte, não custa repetir o diagnóstico de Immanuel Kant sobre o estado da lógica em sua época (1787, quando da publicação da segunda edição da 'Crítica da Razão Pura'):

Desde Aristóteles... a lógica não pode avançar um passo sequer e é, para todos os efeitos, uma doutrina completa e fechada (Bviii).

A impressão de Kant é, em certa medida, justificada. Os escritos de Aristóteles são de uma clareza e inventividade inigualáveis. Muitas ideias desenvolvidas (e ainda por desenvolver) em lógica já estão lá presentes, mesmo que em potência (como diria o próprio Aristóteles).

Porém, se a primeira parte do diagnóstico de Kant já não era acurada na época de seu proferimento (vale lembrar, por exemplo, dos avanços legados por Gottfried Leibniz algumas décadas antes de Kant), a segunda parte, quando avaliada a partir de nossa época, soa tão equivocada quanto o diagnóstico do presidente da IBM, que disse, em 1943, sobre o mercado de computadores: "creio que há um mercado mundial para, no máximo, cinco computadores". O final do século XIX e o começo do século XX viram um florescimento do estudo da lógica

que não se assemelha a nada ocorrido antes (ao ponto de a expressão 'lógica clássica' geralmente ser utilizada para denotar a lógica desenvolvida neste período). O florescimento da lógica no século XX veio a culminar, por exemplo, nos computadores modernos, que são muito mais que cinco.

Mas por qual motivo a árvore plantada por Aristóteles só veio a florescer tão tardiamente? Os motivos que levaram ao florescimento da lógica no século XX são diversos, mas eu quero, aqui, ressaltar apenas um deles: a formalização da linguagem e dos procedimentos utilizados. O lógico Jan Łukasiewicz, ponto de contato entre a lógica de Aristóteles e a moderna, dizia que a lógica de Aristóteles é formal, mas não formalizada. A lógica de Aristóteles é formal porque investiga padrões válidos de argumentação independentemente de seu conteúdo. Porém Aristóteles, entre outros tantos lógicos, por séculos e séculos, fazia esse tipo de estudo utilizando apenas a linguagem natural (além de seu intelecto superior). Um dos componentes que levaram ao florescimento da lógica no século XX foi exatamente o desenvolvimento de uma linguagem formal, que pode ser estranha e difícil de entender à primeira vista (eu sou de humanas!), mas que facilita enormemente o trabalho do lógico.

Num certo sentido, este volume se destina a explicar por que as afirmações (1) e (2) são verdadeiras e porque não há qualquer contradição entre elas. Nos capítulos seguintes, vocês terão acesso à tradução para o português de três verbetes da Stanford Encyclopedia of Philosophy (<https://plato.stanford.edu/>), uma enciclopédia de filosofia online que é comumente *o melhor lugar* para começar o estudo sobre qualquer tema em filosofia. O projeto é atualmente capitaneado Edward N. Zalta, um filósofo que utiliza as ferramentas da lógica modal para estudar objetos não-existentes (sim, filósofos fazem esse tipo de coisa). Os verbetes traduzidos aqui são 'A Lógica de Aristóteles' (capítulo 1), 'Lógica Clássica' (aquela do início do século XX, capítulo 2) e 'Lógica Modal' (capítulo 3). A lógica modal é um dos frutos do florescimento da lógica no século XX e foi desenvolvida, entre outros, pelo filósofo Jaakko Hintikka, que foi orientador de Terence Parsons, que foi orientador de... Edward N. Zalta.

A realização mais famosa de Aristóteles como lógico é sua silogística. Essa teoria trata de argumentos de um tipo muito específico: argumentos com duas premissas, cada qual sendo uma frase categórica, tendo exatamente um termo em comum, e tendo como conclusão uma frase categórica cujos termos são exatamente os dois termos não partilhados pelas premissas. As afirmações

estudadas por Aristóteles são *categóricas* porque tratam das relações entre categorias (por exemplo, entre as categoria dos homens e a dos seres mortais). As afirmação estudadas por Aristóteles são de quatro tipos, em que A e B são categorias (por exemplo, a categoria dos homens e a dos seres mortais):

- **Universal afirmativa:** Todo A é B.
- **Universal negativa:** Nenhum A é B.
- **Particular afirmativa:** Algum A é B.
- **Particular negativa:** Nem todo A é B.

Não é difícil perceber que há 256 maneiras de combinar afirmações desse tipo em argumentos com o formato acima. O exemplo de combinação mais famoso é o seguinte:

1. Todo A é B.
2. Todo B é C.
3. Todo A é C.

Aristóteles investiga sistematicamente esses argumentos e, para cada combinação, ele demonstra ou que alguma conclusão se segue das premissas, ou que nenhuma conclusão se segue das premissas. Para demonstrar que uma conclusão se segue das premissas, Aristóteles utiliza uma série de transformações para reduzir o argumento estudado a um dos argumentos cuja validade é óbvia (por exemplo, o argumento acima). Eis algumas das transformações utilizadas por Aristóteles.

- Nenhum A é B \rightarrow Nenhum B é A.
- Algum A é B \rightarrow Algum B é A.

O procedimento é claro o suficiente, porém sua aplicação à redução de um argumento a outro obviamente válido nem sempre é muito fácil de entender. Eis um exemplo, cuja compreensão é ainda dificultada pela uso grego da expressão 'X pertence a Y' para expressar que Y é X:

B pertence a todo A, mas não a nenhum C, então A também não pertencerá a nenhum C. Pois se B não pertence a nenhum C, então C não pertence a algum B; mas B pertence a todo A; Portanto, C não pertencerá a nenhum A (pois surgiu a primeira figura). E dado que a privativa se converte, tampouco A pertencerá a algum C. (*Analíticos Anteriores* I.5,27a9-12)

O cálculo de predicados de primeira-ordem (o nome oficial do que chamaremos de 'lógica clássica') foi introduzido no final do século XIX pelo filósofo alemão Gottlob Frege e pelo filósofo e pelo estadunidense Charles Sanders Peirce. O trabalho de Frege (apesar de sua notação nada convidativa) deu origem a uma linhagem de grandes estudos em lógica, como, por exemplo, a prova da completude da lógica clássica desenvolvida por Kurt Gödel (de maneira geral, a prova de que a lógica clássica é capaz de provar todas as verdades lógicas). O mérito de Peirce, porém, só foi reconhecido muito tardiamente, em retrospecto.

Em notação contemporânea, podemos dizer que a lógica clássica utiliza constantes predicativas (A, B, C, etc) para denotar propriedades ("categorias") e constantes individuais (a, b, c, etc) para denotar indivíduos. Nesse contexto, a sentença 'Sócrates é mortal' pode ser expressa como Ms, em que M denota a propriedade de ser mortal e s denota Sócrates. Além disso, são utilizados conectivos \wedge (conjunção), \vee (disjunção), \supset (condicional) e \neg (negação) para expressar as construções 'A e B', 'A ou B', 'se A, então B' e 'não é o caso de A' (respectivamente). Consequentemente, a sentença 'ou Sócrates é mortal ou não é' pode ser expressa em lógica clássica como $Ms \vee \neg Ms$.

Porém a principal inovação da lógica clássica é o uso de quantificadores e variáveis. Em notação contemporânea, o quantificador universal (\forall , que é lido como 'para todo') e o quantificador existencial (\exists , que é lido como 'para algum') podem ser combinados com variáveis e conectivos para formar sentenças como $\forall x(Mx \vee \neg Mx)$, que é lida como 'para todo x, ou x é mortal ou não é'. Dessa maneira, podemos expressar facilmente as afirmações estudadas por Aristóteles em linguagem da lógica clássica:

- 'Todo A é B' é expressa por $\forall x(Ax \supset Bx)$.
- 'Nenhum A é B' é expressa por $\forall x(Ax \supset \neg Bx)$.

- ‘Algum A é B’ é expressa por $\exists x(Ax \wedge Bx)$.
- ‘Nem todo A é B’ é expressa por $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$.

Existem diferentes métodos de prova para a lógica clássica: o método axiomático, o cálculo de seqüentes, os tablôs semânticos, etc. Esses métodos são equivalentes, no sentido de que provam as mesmas coisas. No capítulo 2, há uma explicação mais detalhada de um desses métodos, a dedução natural. De modo geral, a dedução natural funciona a partir da aplicação a sentenças de regras que permitem introduzir e eliminar conectivos, formando novas sentenças. Por exemplo, a partir das premissas de que $A \supset B$ e A , podemos concluir que B (regra de eliminação do condicional ou *modus ponens*). Noutro exemplo, a partir das premissas de que $A \supset B$ e $\neg B$, podemos concluir que $\neg A$ (*modus tollens*). Na prova adiante, uso outras regras. Espero estas sejam inteligíveis dado o significado das sentenças.

Somente para exemplificar como a linguagem formal e os métodos de provas modernos facilitam a prova de que um silogismo é válido, considere o silogismo discutido por Aristóteles acima. Nesse exemplo, queremos provar, a partir das premissas de que ‘todo A é B’ [em nossa linguagem, $\forall x(Ax \supset Bx)$] e ‘nenhum C é B’ [$\forall x(Cx \supset \neg Bx)$], que ‘Nenhum C é A’ [$\forall x(Cx \supset \neg Ax)$]. Segue-se, então, uma derivação em dedução natural:¹

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $\forall x(Ax \supset Bx)$ | Premissa |
| 2. $\forall x(Cx \supset \neg Bx)$ | Premissa |
| 3. Ca | Suposição (para generalização universal) |
| 4. $Ca \supset \neg Ba$ | 2, instanciação universal |
| 5. $\neg Ba$ | 3, 4, <i>modus ponens</i> |
| 6. $Aa \supset Ba$ | 1, instanciação universal |
| 7. $\neg Aa$ | 5, 6, <i>modus tollens</i> |
| 8. $Ca \supset \neg Aa$ | 3, 7, introdução do \supset |
| 9. $\forall x(Cx \supset \neg Ax)$ | 8, generalização universal. |

¹ Se não agora, depois de ler o capítulo 2, vocês também irão encontrar a prova de dedução natural mais clara e simples que a prova de Aristóteles. Ou, ao menos, assim eu espero.

Porém, a lógica clássica tem outras vantagens em relação à silogística. A principal delas é que, enquanto a silogística lida apenas com um tipo muito específico de argumento, é possível expressar muitas outras afirmações na linguagem da lógica clássica. Além disso, é possível expressar de maneira clara na linguagem formal da lógica clássica afirmações que soam ambíguas na linguagem natural. Por exemplo, a linguagem formal da lógica clássica é capaz de desambiguar duas leituras da afirmação ‘todo mundo ama alguém’: cada pessoa ama alguma (outra?) pessoa ($\forall x\exists yAxy$) e há uma pessoa que é amada por todos ($\exists y\forall xAxy$), em que Axy é a relação ‘ x ama y ’.

A lógica modal, de maneira geral, investiga os modos em que uma afirmação pode ser verdadeira ou falsa, especialmente sua possibilidade, necessidade e impossibilidade. O primeiro local em que noções modais aparecem nos escritos lógicos de Aristóteles é na própria definição de dedução (*sylogismos*): uma dedução é uma locução (logos) em que, uma vez que certas coisas tenham sido supostas, algo distinto do que foi suposto resulta *por necessidade*, devido às suposições como tais. (*Analíticos Anteriores* I.2, 24b18-20). Essa é, inclusive, uma noção de validade muito próxima daquela usada atualmente.

Porém, para além disso, Aristóteles também desenvolve, de modo menos satisfatório e de mais difícil interpretação, é verdade, uma silogística modal. A abordagem de Aristóteles na silogística modal é muito parecida com aquela utilizada em sua silogística ‘não-modal’. Aristóteles propõe algumas transformações lógicas para reduzir argumentos modais a um dos argumentos não-modais cuja validade já é aceita. Eis aqui uma das transformações utilizadas, em que A é uma afirmação categórica (por exemplo, ‘Todo homem é mortal’).

- É necessário que $A \rightarrow A$.

Essa transformação é bastante razoável. Geralmente, pensamos que tudo o que é necessário é o caso. Se necessariamente todo homem é mortal, então todo homem é mortal. Porém, também pensamos que tudo o que é o caso é possível. Por exemplo, dado que estou, aqui, neste momento, escrevendo este texto, deve ser possível para mim escrever este texto. Como não seria? Nesse caso, uma das dificuldades da silogística modal advém do fato de Aristóteles entender ‘possível’ como querendo dizer ‘nem necessário nem impossível’. Desse modo, Aristóteles *não* aceita a seguinte transformação.

- $A \rightarrow$ é possível que A.

O primeiro estudo sistemático moderno da lógica modal foi feita pelo filósofo C. I. Lewis. Na lógica modal introduzida por C. I. Lewis, em notação moderna, a linguagem da lógica clássica é suplementada com dois novos operadores: \Box , lido como ‘é necessário que’, e \Diamond , lido como ‘é possível que’. Assim como os quantificadores universal (\forall) e existencial (\exists) são inter-definíveis ($\forall \equiv \neg\exists\neg$ e $\exists \equiv \neg\forall\neg$), os operadores modais de necessidade e possibilidade são inter-definíveis ($\Box \equiv \neg\Diamond\neg$ e $\Diamond \equiv \neg\Box\neg$). Essa ‘coincidência’ entre quantificadores e operadores modais torna-se óbvia quando consideramos uma interpretação informal baseada na semântica desenvolvida pelo filósofo Saul Kripke, quando da tenra idade de 16 anos: necessário é o que ocorre em *todos* mundos possíveis, possível é o que ocorre em *algum* mundo possível.

Em lógica modal moderna, o fato de haver diferentes noções de necessidade e possibilidade circulando na linguagem natural (por exemplo, o que é necessariamente necessário é necessário?) é contornado adicionando diferentes axiomas ou regras à lógica clássica, gerando diferentes sistemas modais, que podem ser usados para modelar diferentes noções de necessidade e possibilidade. Por exemplo, o axioma $\Box A \supset A$ (conhecido como ‘axioma M’) expressa a afirmação, geralmente aceita (por exemplo, por Aristóteles) de que tudo o que é necessário é o caso. A partir do axioma M e das inter-definições, podemos provar que tudo o que é o caso é possível (o ‘axioma M*’):

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\Box\neg B \supset \neg B$ | Axioma M, em que $A = \neg B$ |
| 2. B | Suposição |
| 3. $\neg\neg B$ | 2, introdução da $\neg\neg$ |
| 4. $\neg\Box\neg B$ | 1, 2, <i>modus tollens</i> |
| 5. $\Diamond B$ | 4, $\Diamond \equiv \neg\Box\neg$ |
| 6. $B \supset \Diamond B$ | 2, 5, introdução da \supset |

A utilização de uma linguagem formal ajuda bastante o raciocínio a partir das noções de necessidade e possibilidade. Por exemplo, a partir do pressuposto de que verdades lógicas são necessárias (regra de necessitação) e das premissas

de que se é necessário que se A, então B, então se é necessário que A, então é necessário que B (axioma K: $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$) e de que se é possível que A, então é necessário que seja possível que A (axioma 5: $\Diamond A \supset \Box \Diamond A$), é possível provar que se é possível que seja necessário que seja possível que seja necessário que A, então é necessário que A ($\Diamond \Box \Diamond A \supset \Box A$). Deixo essa prova como exercício ao leitor (mas antes estude o capítulo 3).²

Agora, pensem comigo: se já foi difícil para mim expressar o que eu queria expressar no último parágrafo utilizando apenas linguagem natural (e receio que a leitura tenha sido igualmente difícil para você, desculpe-me), qual não era o grau de dificuldade que um lógico pré-moderno (por exemplo, Aristóteles) precisava enfrentar para raciocinar sobre esses assuntos sem o auxílio de uma linguagem formal? Do meu ponto de vista, devemos para sempre admirar a inteligência (e persistência) desse gigante, mas sem deixar de aproveitar dos avanços da lógica no século XX. Quem sabe não será você que, em conjunto com os outros lógicos do século XXI, tornará falsa a afirmação (2) do início desse texto?

Prof. Dr. Danilo Fraga Dantas
Prof. Dr. Rodrigo Reis Lastra Cid
Organizadores do Volume "Textos Seleccionados de Lógica"

² Outra limitação da silogística modal é que esta não distingue entre as afirmações 'necessariamente todo A é B' ($\Box \forall x(Ax \supset Bx)$) e 'todo A é necessariamente B' ($\forall x \Box(Ax \supset Bx)$). Essa distinção parece inofensiva quando lidamos com necessidade quantificação universal, mas considere a diferença entre existe um objeto que poderia não existir' ($\exists x \Diamond \neg Ex$), por exemplo, um quadro que van Gogh pintou, mas poderia não ter pintado, e 'é possível que exista um... objeto não-existente' ($\Diamond \exists x \neg Ex$). Edward N. Zalta, corre aqui! O estudo da interação entre quantificadores e modalidades foi introduzido pela filósofa Ruth Barcan Marcus.

(I) A Lógica de Aristóteles*

Autor: Robin Smith

Tradução: Elton Luiz Rasch (UFSM)

Revisão: Frank Thomas Sautter (UFSM), Rogério Passos Severo (UFRGS)

A lógica aristotélica, especialmente sua teoria do silogismo, teve uma influência sem paralelo na história do pensamento ocidental. Mas ela nem sempre ocupou essa posição: no período Helenístico, a Lógica Estoica, e em particular a obra de Crisipo, ocupou um lugar de honra. Contudo, na antiguidade tardia, seguindo a obra dos comentadores de Aristóteles, a lógica de Aristóteles se tornou dominante, e foi a lógica aristotélica que foi transmitida à tradição medieval árabe e para a tradição latina, enquanto as obras de Crisipo não sobreviveram.

Essa posição histórica única nem sempre contribuiu para a compreensão das obras lógicas de Aristóteles. Kant pensou que Aristóteles havia descoberto tudo que pode ser conhecido em lógica, e o historiador da lógica Prantl extraiu o corolário de que, qualquer pessoa que apresentasse algo novo em lógica, após Aristóteles, estaria confusa, seria estúpida, ou perversa. Durante a ascensão da lógica formal contemporânea posterior a Frege e Peirce, adeptos da Lógica

* Tradução do verbete "Aristotle's Logic" de Robin Smith publicado pela *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Edição da Primavera de 2012), edição de Edward N. Zalta, URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/spr2012/entries/aristotle-logic/>>. Publicado com a autorização do Prof. Dr. Edward Zalta. Tradução primeiramente publicada em *Investigação Filosófica*: volume 3, número 2, 2012. Disponível em: <<https://periodicos.unifap.br/index.php/investigacaofilosofica/article/view/4867/2193>>.

The following is the translation of the entry on Aristotle Logic by Robin Smith, in the Stanford Encyclopedia of Philosophy. The translation follows the version of the entry in the SEP's archives at <http://plato.stanford.edu/archives/spr2012/entries/aristotle-logic/>. This translated version may differ from the current version of the entry, which may have been updated since the time of this translation. The current version is located at <https://plato.stanford.edu/entries/aristotle-logic/>. We'd like to thank the Editors of the Stanford Encyclopedia of Philosophy, mainly Prof. Dr. Edward Zalta, for granting permission to translate and to publish this entry.

Tradicional (vistos como descendentes da Lógica Aristotélica) e da nova Lógica Matemática tenderam a verem-se como rivais, com noções de lógica incompatíveis. Estudiosos mais recentes muitas vezes têm aplicado técnicas da Lógica Matemática às teorias de Aristóteles, revelando (na opinião de muitos) uma série de similaridades de abordagens e interesses entre Aristóteles e os lógicos contemporâneos.

Este verbete é escrito a partir desta última perspectiva. Desse modo, trata da lógica de Aristóteles, que nem sempre é a mesma coisa do que tem sido chamada Lógica “Aristotélica”.

1. Introdução

As obras lógicas de Aristóteles contêm o primeiro estudo formal de lógica que possuímos. Por isso, é ainda mais notável que juntos elas compreendam uma teoria lógica altamente desenvolvida, que foi capaz de impor um imenso respeito durante muitos séculos: Kant, que estava dez vezes mais distante de Aristóteles que nós estamos de Kant, chegou a sustentar que nada de significativo foi acrescentado às concepções de Aristóteles no intervalo de dois milênios.

No último século, a reputação de Aristóteles como lógico sofreu dois reveses notáveis. A ascensão da lógica formal contemporânea seguindo as obras de Frege e Russell trouxe consigo um reconhecimento das muitas limitações sérias da lógica de Aristóteles; hoje são realmente poucos os que tentariam sustentar que ela é adequada como base para a compreensão da ciência, da matemática, ou mesmo do raciocínio cotidiano. Ao mesmo tempo, estudiosos treinados em técnicas formais contemporâneas passaram a ver Aristóteles com um respeito renovado, não tanto pela correção de seus resultados quanto pela similaridade de espírito notável entre boa parte de sua obra e a lógica contemporânea. Como Jonathan Lear colocou, “Aristóteles compartilha com os lógicos contemporâneos um interesse fundamental em metateoria”: seu objetivo primário não é oferecer um guia prático para argumentação, mas estudar as propriedades de sistemas inferenciais enquanto tais.

2. As Obras Lógicas de Aristóteles: O *Organon*

Os comentadores antigos agruparam vários tratados de Aristóteles sob o título *Organon* (“Instrumento”) e os consideravam como compreendendo suas obras lógicas:

1. *Categorias*
2. *Da Interpretação*
3. *Analíticos Anteriores*
4. *Analíticos Posteriores*
5. *Tópicos*
6. *Das Refutações Sofísticas*

De fato, o título *Organon* reflete uma controvérsia muito posterior sobre se a lógica é uma parte da filosofia (como sustentaram os estoicos) ou meramente uma ferramenta usada pela filosofia (como pensaram os peripatéticos tardios); chamar as obras lógicas de “O Instrumento” é uma maneira de tomar parte nessa disputa. Aristóteles nunca utilizou esse termo, nem dá muita indicação de que esses tratados particulares formam algum tipo de grupo, embora frequentemente haja referências cruzadas entre os *Tópicos* e os *Analíticos*. Por outro lado, Aristóteles trata os *Analíticos Anteriores* e *Posteriores* como uma obra, e *Das Refutações Sofísticas* é uma sessão final ou um apêndice aos *Tópicos*. A estas obras deveria ser adicionada a *Retórica*, que declara explicitamente sua dependência dos *Tópicos*.

3. O Assunto da Lógica: “Silogismos”

Toda lógica de Aristóteles gira em torno de uma noção: a **dedução** (*sylogismos*). Uma explicação completa do que uma dedução é, e do que ela é composta, necessariamente nos levará a toda sua teoria. O que é então, uma dedução? Aristóteles diz:

Uma dedução é uma locução (*logos*) em que, uma vez que certas coisas tenham sido supostas, algo distinto do que foi suposto resulta por necessidade, devido às suposições como tais. (*Analíticos Anteriores* I.2, 24b18-20)

Cada uma dessas “coisas supostas” é uma **premissa** (*protasis*) do argumento, e o que “resulta por necessidade” é a **conclusão** (*sumperasma*).

O núcleo dessa definição é a noção de “resultando por necessidade” (*ex anankês sumbainein*). Isso corresponde a uma noção contemporânea de consequência lógica: X resulta necessariamente de Y e Z se for impossível X ser falso quando Y e Z forem verdadeiros. Desse modo, poderíamos tomar isso como sendo uma definição geral de “argumento válido”.

3.1. Indução e Dedução

Deduções são uma das duas espécies de argumento reconhecida por Aristóteles. A outra espécie é a **indução** (*epagôgê*). Ele tem muito menos a dizer sobre esta do que sobre dedução, fazendo apenas um pouco mais do que caracterizá-la como um “argumento do particular para o universal”. Contudo, a indução (ou algo muito parecido com isso) cumpre um papel crucial na teoria do conhecimento científico dos *Analíticos Posteriores*: é a indução, ou pelo menos, um processo cognitivo que vai de particulares para suas generalizações, que é a base do conhecimento dos primeiros princípios indemonstráveis das ciências.

3.2. Deduções Aristotélicas e Argumentos Contemporâneos Válidos

Apesar de sua grande generalidade, a definição de dedução de Aristóteles não é o correspondente exato para definição contemporânea de validade. Algumas das diferenças podem ter consequências importantes:

1. Aristóteles diz explicitamente que o que resulta por necessidade tem de ser algo diferente do que é suposto. Isso eliminaria argumentos nos quais a conclusão é idêntica a uma das premissas. Noções de validade contemporâneas

consideraram esses argumentos válidos, embora trivialmente válidos.

2. O plural “certas coisas tenham sido supostas” foi tomado por comentadores antigos como excluindo argumentos com apenas uma premissa.

3. A força da qualificação “devido às suposições como tais” às vezes tem sido vista como eliminando argumentos nos quais a conclusão não é ‘relevante’ às premissas, por exemplo, argumentos nos quais as premissas são inconsistentes, argumentos com conclusões que se seguiriam de quaisquer premissas, ou argumentos com premissas supérfluas.

Dessas três restrições possíveis, a mais interessante é a terceira. Isso poderia ser (e tem sido) interpretado como o comprometendo Aristóteles a algo como uma lógica relevante. De fato, há passagens que aparentam confirmar isso. Contudo, isso é um assunto muito complicado para ser discutido aqui.

Como quer que a definição seja interpretada, fica claro que Aristóteles não queria restringi-la apenas a um subconjunto de argumentos válidos. É por isso que traduzi *sullogismos* com “dedução” invés de cognato inglês. No uso contemporâneo, “silogismo” significa um argumento de uma forma muito específica. Ademais, o uso contemporâneo distingue entre silogismos válidos (cujas conclusões se seguem das premissas) e silogismos inválidos (cujas conclusões não se seguem das premissas). O segundo desses usos é inconsistente com o uso de Aristóteles: uma vez que ele define um *sullogismos* como um argumento no qual a conclusão resulta necessariamente das premissas, “*sullogismos* inválido” é uma contradição em termos. O primeiro também é, pelo menos, altamente enganoso, dado que Aristóteles não parece pensar que os *sullogismoi* são simplesmente um subconjunto interessante de argumentos válidos. Além disso (ver abaixo), Aristóteles despense grande esforço para argumentar que todo argumento válido, em sentido amplo, pode ser “reduzido” a um argumento, ou série de argumentos, em algo como uma das formas tradicionalmente chamadas de silogismo. Se traduzirmos *sullogismos* como “silogismo”, seremos levados a afirmação trivial “Todo silogismo é um silogismo”.

4. Premissas: As Estruturas das Asserções

Silogismos são estruturas de frases, cada uma das quais podendo ser significativamente chamada verdadeira ou falsa: **asserções** (*apophaneseis*), na

terminologia de Aristóteles. De acordo com Aristóteles, cada uma dessas frases tem de ter a mesma estrutura: tem de conter um **sujeito** (*hupokeimenon*) e um **predicado**, e tem de ou afirmar ou negar o predicado do sujeito. Assim, toda asserção é ou uma **afirmação** (*kataphasis*) ou uma **negação** (*apophasis*) de um único predicado com relação a um único sujeito.

Em *Da Interpretação*, Aristóteles argumenta que uma asserção singular sempre tem de ou afirmar ou negar um único predicado de um único sujeito. Assim, ele não reconhece frases compostas, tais conjunções e disjunções como asserções singulares. Isso parece ser uma escolha deliberada de sua parte: ele argumenta, por exemplo, que uma conjunção é simplesmente uma coleção de asserções, sem uma unidade mais intrínseca do que a sequência de frases ao longo de um relato (por exemplo, a *Iliada* inteira, segundo o exemplo próprio de Aristóteles). Dado que ele também trata negações como uma das duas espécies básicas de asserção, ele não vê negações como compostos frasais. Seu tratamento de frases condicionais e disjunções é mais difícil de avaliar, mas de qualquer modo está claro que Aristóteles não fez esforço algum para desenvolver uma lógica proposicional. Algumas das consequências disso são importantes para sua teoria da demonstração.

4.1. Termos

Sujeitos e predicados de asserções são **termos**. Um termo (*horos*) pode ser ou individual, por exemplo, *Sócrates*, *Platão*, ou universal, por exemplo, *humano*, *cavalo*, *animal*, *branco*. Sujeitos podem ser ou individuais ou universais, mas predicados somente podem ser universais: *Sócrates é humano*, *Platão não é um cavalo*, *cavalos são animais*, *humanos não são cavalos*.

A palavra **universal** (*katholou*) parece ter sido cunhada por Aristóteles. Literalmente, ela significa “de um todo”; seu oposto, por isso, é “de um particular” (*kath’ hekaston*). Termos universais são aqueles que adequadamente servem como predicados, enquanto termos particulares são aqueles que não servem.

Essa distinção não é simplesmente uma questão de função gramatical. Podemos facilmente construir uma frase tendo “Sócrates” como predicado gramatical: “A pessoa sentada é Sócrates”. Aristóteles, contudo, não considera isso como uma forma de predicação genuína. Em vez disso, ele a chamava de

predicação meramente **acidental** ou **incidental** (*kata sumbebêkos*). Tais frases são, para ele, quanto a seus valores de verdade, dependentes de outras predicacões genuínas (nesse caso, “Sócrates está sentado”).

Consequentemente, a predicação para Aristóteles é tanto uma questão de metafísica quanto uma questão gramatical. A razão pela qual o termo *Sócrates* é um termo individual e não um universal é que a entidade que ele designa é um indivíduo, e não um universal. O que faz de *branco* e *humano* termos universais é o fato deles designarem universais.

Uma discussão adicional desses problemas pode ser encontrada no verbete da metafísica de Aristóteles.

4.2. Afirmações, Negações e Contradições

Aristóteles despende algum trabalho em *Da Interpretação* para argumentar que a cada afirmação corresponde exatamente uma negação, tal que essa negação nega exatamente o que a afirmação afirma. O par que consiste de uma afirmação e sua negação correspondente é uma **contradição** (*antiphrasis*). Em geral, sustenta Aristóteles, exatamente um membro de qualquer contradição é verdadeiro e o outro falso: eles não podem ser ambos verdadeiros, e não podem ser ambos falsos. Contudo, ele aparenta fazer uma exceção para proposições sobre eventos futuros, embora intérpretes tenham debatido extensamente sobre o que tal exceção poderia ser (ver a discussão adicional abaixo). O princípio de que contraditórias não podem ser ambas verdadeiras tem importância fundamental na metafísica de Aristóteles (ver discussão adicional abaixo).

4.3. Todo, Algum e Nenhum

Uma grande diferença entre a compreensão da predicação por Aristóteles e pela lógica contemporânea (isto é, pós-fregeana) é que Aristóteles trata predicacões individuais e predicacões gerais como similares quanto à forma lógica: ele fornece a mesma análise para “Sócrates é um animal” e para “Humanos são animais”. Contudo, ele nota que quando o sujeito é um universal, a predicação

toma duas formas: ela pode ser ou **universal** ou **particular**. Essas expressões são paralelas àquelas com as quais Aristóteles distingue termos universais e particulares, e Aristóteles estava ciente disso, explicitamente distinguindo entre um termo ser um universal e um termo ser universalmente predicado de outro.

O que quer que seja afirmado ou negado de um sujeito universal pode ser afirmado ou negado dele **universalmente** (*katholou* ou “de todo”, *kata pantos*), **em partes** (*kata meros, en merei*), ou **indefinidamente** (*adihoristos*).

	Afirmações		Negações	
Universais	P afirmado de todo S	Todo S é P, Todos os S são P	P negado de todos os S	Nenhum S é P
Particulares	P afirmado de algum S	Algum S é P	P negado de algum S	Algum S não é P Nem todo S é P
Indefinidas	P afirmado de S	S é P	P negado de S	S não é P

4.3.1. O “Quadrado de Oposições”

Em *Da Interpretação*, Aristóteles detalha as relações de contradição de frases com sujeitos universais do modo como segue:

Afirmção	Negação
Universal Todo A é B	Nenhum A é B
Particular Algum A é B	Nem todo A é B

Por mais simples que possa parecer, essa tabela levanta dificuldades de interpretação importantes (para uma discussão adicional, ver o verbete do quadrado de oposições).

Nos *Analíticos Anteriores*, Aristóteles adota um modo um tanto quanto artificial de expressar predicções: em vez de dizer “X é predicado de Y” ele diz “X pertence (*huparchei*) a Y”. Isso realmente deveria ser considerado como uma expressão técnica. O verbo *huparchein* costumeiramente significa “começar” ou “existe, está presente”, e o uso de Aristóteles parece ser um desenvolvimento desse último uso.

4.3.2. Algumas Abreviações Convenientes

Por clareza e brevidade, usarei as seguintes abreviações semitradicionais para as frases categóricas de Aristóteles:

Abreviação	Frase
Aab	a pertence a todo b (Todo b é a)
Eab	a pertence a nenhum b (Nenhum b é a)
Iab	a pertence a algum b (Algum b é a)
Oab	a não pertence a todo b (Algum b não é a)

5. A Silogística

A realização mais famosa de Aristóteles como lógico é a sua teoria da inferência tradicionalmente chamada **silogística** (embora não pelo próprio Aristóteles). Essa teoria é de fato a teoria de inferências de um tipo muito específico: inferências com duas premissas, cada qual sendo uma frase categórica, tendo exatamente um termo em comum, e tendo como conclusão uma frase categórica cujos termos são exatamente estes dois termos não compartilhados pelas premissas. Aristóteles chamava o termo compartilhado pelas premissas de **termo médio** (*meson*) e cada um dos outros dois termos nas premissas de um **extremo** (*akron*). O termo médio tem de ser ou um sujeito ou um predicado de

cada premissa, e isso pode acontecer de três modos: o termo médio pode ser o sujeito de uma premissa e o predicado da outra, o predicado das duas premissas, ou o sujeito das duas premissas. Aristóteles refere-se a esses arranjos de termos como **figuras** (*schêmata*):

5.1. As Figuras

	Primeira Figura		Segunda Figura		Terceira Figura	
	Predicado	Sujeito	Predicado	Sujeito	Predicado	Sujeito
Premissa	a	b	a	b	a	a
Premissa	b	c	a	c	b	b
Conclusão	a	c	b	c	a	a

Aristóteles chama o termo que é predicado da conclusão de termo **maior** e o termo que é sujeito da conclusão de termo **menor**. A premissa contendo o termo maior é a **premissa maior**, e a premissa contendo o termo menor é a **premissa menor**.

Aristóteles investiga sistematicamente todas as possíveis combinações de duas premissas em cada uma das três figuras. Para cada combinação, ele ou demonstra que alguma conclusão se segue necessariamente, ou demonstra que nenhuma conclusão se segue. Os resultados que ele estabelece estão corretos.

5.2. Métodos de Prova: Deduções “Perfeitas”, Conversão, Redução

As provas de Aristóteles podem ser divididas em duas categorias, baseadas em uma distinção que ele estabelece entre deduções “perfeitas” ou “completas” (*teleios*) e deduções “imperfeitas” ou “incompletas” (*atelês*). Uma dedução é perfeita se ela “não requer um termo externo para mostrar o resultado necessário” (24b23-24), e é imperfeita se ela “adicionalmente, requer um ou muitos que são necessários devido aos termos supostos, mas não são supostos

nas premissas” (24b24-25). A interpretação precisa dessa distinção é discutível, mas de qualquer modo está claro que Aristóteles considera as deduções perfeitas como sendo aquelas que, em algum sentido, não requerem prova. Para deduções imperfeitas Aristóteles fornece provas, que invariavelmente dependem das deduções perfeitas. Assim, com algumas ressalvas, podemos comparar as deduções perfeitas com os axiomas ou regras primitivas de um sistema dedutivo.

Nas provas para deduções imperfeitas, Aristóteles diz que ele “reduz” (*anagein*) cada caso a uma das formas perfeitas e que desse modo elas seriam “completadas” ou “perfectibilizadas”. Esses complementos são ou **probatórios** (*deiktikos*: uma tradução contemporânea poderia ser “diretas”) ou **através do impossível** (*dia to adunaton*).

Uma dedução direta é uma série de passos levando das premissas para a conclusão, cada qual é ou uma **conversão** de um passo anterior ou uma inferência de dois passos anteriores dependentes de uma dedução da primeira figura. Conversão, por sua vez, é inferir uma proposição de outra que tem seu sujeito e predicados trocados. Especificamente, Aristóteles argumenta que três conversões são legítimas:

- $Eab \rightarrow Eba$
- $lab \rightarrow lba$
- $Aab \rightarrow lba$

Ele incumbe-se de justificá-las nos *Analíticos Anteriores* I.2. De um ponto de vista contemporâneo, a terceira é, as vezes, vista com suspeição. Utilizando-a podemos obter *Alguns monstros são quimeras* da aparentemente verdadeira *Todas as quimeras são monstros*; entretanto a anterior é por vezes interpretada como implicando, por sua vez, *Existe algo que é um monstro e uma quimera*, e assim, que há monstros e que há quimeras. Na verdade, isto simplesmente aponta para algo no sistema de Aristóteles: com efeito, Aristóteles supõe que *Todos* os termos nos silogismos são não vazios (para uma discussão adicional, ver o verbete do quadrado de oposições). Como um exemplo desse procedimento, podemos tomar a prova que Aristóteles dá para *Camestres*. Ele diz:

Se M pertence a todo N, mas não a nenhum X, então N também não pertencerá nenhum X. Pois se M não pertence

a nenhum X, então X não pertence a algum M; mas M pertence a todo N; Portanto, X não pertencerá a nenhum N (pois surgiu a primeira figura). E dado que a privativa se converte, tampouco N pertencerá a algum X. (*Analíticos Anteriores* I.5,27a9-12)

Desse texto podemos extrair uma prova formal exata, tal como segue:

Passo	Justificação	Texto de Aristóteles
1. MaN		<i>Se M pertence a todo N</i>
2. MeX		<i>mas não a nenhum X</i>
A ser provado: NeX		<i>então N pertencerá a nenhum X</i>
3. MeX	(2, premissa)	<i>Pois se M não pertence a nenhum X</i>
4. XeM	(3, conversão de e)	<i>então X não pertence a algum M</i>
5. MaN	(1, premissa)	<i>mas M pertence a todo N</i>
6. XeN	(4,5, <i>Celarent</i>)	<i>Portanto, X não pertencerá a nenhum N (pois surgiu a primeira figura)</i>
7. NeX	(6, conversão de e)	<i>E dado que a privativa se converte, tampouco N pertencerá a algum X</i>

Um ‘complemento’ ou prova “pelo impossível” mostra que certa conclusão segue-se de um par de premissas ao assumir como uma terceira premissa a negação dessa conclusão, e fornecendo uma dedução dela e outra das premissas originais, a negação (ou contrária) das outras premissas. Essa é a dedução de um “impossível”, e a prova de Aristóteles termina nesse ponto. Um exemplo é a sua prova de *Bocardo* em 27^a36-b1:

Passo	Justificação	Texto de Aristóteles
1. MaN		<i>Segundo, se M pertencer a todo N,</i>
2. MoX		<i>mas a nenhum X,</i>
A ser provado: NoX		<i>então é necessário que N não pertença a algum X</i>
3. NaX	Contraditória da conclusão desejada	<i>pois se pertencer a todo,</i>
4. MaN	Repetição da premissa 1	<i>e M é predicado de todo N,</i>
5. MaX	(3, 4, Barbara)	<i>então é necessário que M pertença a todo X.</i>
6. MoX	(5 é a contraditória de 2)	<i>Mas foi assumido que não pertence a algum.</i>

5.3. Desaprovação: Contraexemplos e Termos

Aristóteles prova a invalidez construindo contraexemplos. Isso vai ao encontro do espírito da teoria lógica contemporânea: tudo que é necessário para mostrar que certa *forma* é inválida é uma *instância* singular dessa forma com premissas verdadeiras e uma conclusão falsa. Contudo, Aristóteles enuncia seus resultados não dizendo que certas combinações de premissas-conclusão são inválidas, mas dizendo que certos pares de premissas não “silogizam”: isto é, dado o par de premissas em questão, exemplos podem ser construídos nos quais as

premissas dessa forma são verdadeiras e a conclusão de qualquer uma das quatro formas possíveis é falsa.

Quando possível, ele faz isso por um método sagaz e econômico: ele fornece duas triplas de termos, uma das quais torna as premissas verdadeiras ao lado de uma “conclusão” universal afirmativa verdadeira, e a outra torna as premissas verdadeiras junto com uma “conclusão” universal negativa verdadeira. A primeira é um contraexemplo de um argumento com conclusão em E ou em O, e a segunda é um contraexemplo para um argumento com conclusão em A ou em I.

5.4. As Deduções nas Figuras (“Modos”)

Nos *Analíticos Anteriores* I.4-6, Aristóteles mostra que a combinação de premissas dada na tabela a seguir produz deduções e que todas as demais combinações de premissas falham em produzir uma dedução. Na terminologia, tradicional desde a idade média, cada uma dessas combinações é conhecida como um **modo** (do Latim *modus*, “maneira”, que por sua vez é a tradução do Grego *tropos*). Aristóteles, contudo, não usa essa expressão e refere-se, em vez disso, como “os argumentos nas figuras”.

Nesta tabela, “ \vdash ” separa as premissas da conclusão e pode ser lido como “portanto”. A segunda coluna lista os nomes mnemônicos medievais associados com a inferência (estes ainda são muito usados, e cada um é, na verdade um mnemônico para a prova aristotélica do modo em questão). A terceira coluna resume brevemente o procedimento de Aristóteles para demonstrar a dedução.

Tabela das Deduções nas Figuras

Forma	Mnemônico	Prova
Aab, Abc \vdash Aac	<i>Barbara</i>	Perfeita
Eab, Abc \vdash Eac	<i>Celarent</i>	Perfeita

$Aab, lbc \vdash lac$	<i>Darii</i>	Perfeita; também por impossibilidade
$Eab, lbc \vdash Oac$	<i>Ferio</i>	Perfeita; também por impossibilidade
SEGUNDA FIGURA		
$Eab, Aac \vdash Ebc$	<i>Cesare</i>	$(Eab, Aac) \rightarrow (Eba, Aac) \vdash_{Cel} Ebc$
$Aab, Eac \vdash Ebc$	<i>Camestres</i>	$(Aab, Eac) \rightarrow (Aab, Eca) = (Eca, Aab) \vdash_{Cel} Ecb \rightarrow Ebc$
$Eab, lac \vdash Obc$	<i>Festino</i>	$(Eab, lac) \rightarrow (Eba, lac) \vdash_{Fer} Obc$
$Aab, Oac \vdash Obc$	<i>Baroco</i>	$(Aab, Oac + Abc) \vdash_{Bar} (Aac, Oac) \vdash_{Imp} Obc$
TERCEIRA FIGURA		
$Aac, Abc \vdash lab$	<i>Darapti</i>	$(Aac, Abc) \rightarrow (Aac, lcb) \vdash_{Dar} lab$
$Eac, Abc \vdash Oab$	<i>Felapton</i>	$(Eac, Abc) \rightarrow (Eac, lcb) \vdash_{Fer} Oab$
$lac, Abc \vdash lab$	<i>Disamis</i>	$(lac, Abc) \rightarrow (lca, Abc) = (Abc, lca) \vdash_{Dar} lba \rightarrow lab$
$Aac, lbc \vdash lab$	<i>Datisi</i>	$(Aac, lbc) \rightarrow (Aac, lcb) \vdash_{Dar} lab$
$Oac, Abc \vdash Oab$	<i>Bocardo</i>	$(Oac, +Aab, Abc) \vdash_{Bar} (Aac, Oac) \vdash_{Imp} Oab$
$Eac, lbc \vdash Oab$	<i>Ferison</i>	$(Eac, lbc) \rightarrow (Eac, lcb) \vdash_{Fer} Oab$

5.5. Resultados Metalógicos

Tendo estabelecido quais deduções são possíveis nas figuras, Aristóteles extrai várias conclusões metateóricas, incluindo:

1. Nenhuma dedução tem duas premissas negativas;
2. Nenhuma dedução tem duas premissas particulares;
3. Uma dedução com uma conclusão afirmativa tem de ter duas premissas afirmativas;
4. Uma dedução com uma conclusão negativa tem de ter uma premissa negativa;

5. Uma dedução com uma conclusão universal tem de ter duas premissas universais.

Ele também prova o seguinte metateorema:

Todas as deduções podem ser reduzidas a duas deduções universais da primeira figura.

Sua prova disso é elegante. Inicialmente, ele mostra que duas deduções particulares da primeira figura podem ser reduzidas, através da prova por impossibilidade, a deduções universais na segunda figura:

(*Darii*) (Aab, lbc, +Eac) ⊢_{Camestres} (Ebc, lbc) ⊢_{Imp} lac
 (*Ferio*) (Eab, lbc, +Aac) ⊢_{Cesare} (Ebc, lbc) ⊢_{Imp} Oac

Ele então observa que, dado que ele já mostrou como reduzir todas as deduções particulares nas outras figuras, com exceção de Baroco e Bocardo, para *Darii* e *Ferio*, essas deduções podem assim ser reduzidas a *Barbara* e *Celarent*. Essa prova é notavelmente similar, tanto em estrutura quanto em conteúdo, à provas contemporâneas de redundância de axiomas em um sistema.

Muitos outros resultados metateóricos, alguns deles muito sofisticados, são provados nos *Analíticos Anteriores* I.45 e nos *Analíticos Anteriores* II. Como se nota abaixo, alguns resultados metateóricos de Aristóteles são referidos nos argumentos epistêmicos dos *Analíticos Posteriores*.

5.6. Silogismos com Modalidades

Aristóteles segue seu tratamento dos “argumentos nas figuras” com uma discussão muito mais longa e problemática sobre o que acontece com esses argumentos nas figuras quando adicionamos as qualificações “necessariamente” e “possivelmente” às premissas, de várias maneiras. Em contraste com a própria silogística (ou, como os comentaristas gostam de chamá-la, a silogística *assertórica*), essa silogística *modal* aparenta ser muito menos satisfatória e certamente é de interpretação muito mais difícil. Aqui apenas esboço o tratamento de Aristóteles desse assunto, e observo alguns dos pontos principais de controvérsias interpretativas.

5.6.1. As Definições de Modalidades

A lógica modal contemporânea trata necessidade e possibilidade como interdefiníveis: “necessariamente P” é equivalente a “não possivelmente não P”, e “possivelmente P” a “não necessariamente não P”. Aristóteles fornece essas mesmas equivalências em *Da Interpretação*. Contudo, nos *Analíticos Anteriores*, ele faz uma distinção entre duas noções de possibilidade. Na primeira, que ele toma como sua noção preferida, “possivelmente P” é equivalente a “não necessariamente P e não necessariamente não P”. Então ele reconhece uma definição alternativa de possibilidade de acordo com a equivalência contemporânea, mas isso cumpre apenas um papel secundário em seu sistema.

5.6.2. A Abordagem Geral de Aristóteles

Aristóteles constrói seu tratamento de silogismos modais tendo por base seus silogismos não modais (**assertóricos**): ele perpassa silogismos que ele já provou e considera as consequências da adição de qualificações modais em uma ou ambas as premissas. Assim, grande parte das vezes a questão explorada possui a forma: “Aqui há um silogismo assertórico; se eu adicionar essas qualificações modais às premissas, então que forma modalmente qualificada de conclusão (se alguma) se segue?”. Uma premissa pode ter uma de três modalidades: ela pode ser necessária, possível ou assertórica. Aristóteles elabora a combinação dessas na seguinte ordem:

- Duas premissas necessárias;
- Uma premissa necessária e outra assertórica;
- Duas premissas possíveis;
- Uma premissa assertórica e uma possível;
- Uma premissa necessária e uma possível.

Embora ele geralmente considere apenas combinações de premissas que silogizam em suas formas assertóricas, às vezes ele faz uma extensão; de modo semelhante, às vezes ele considera conclusões adicionais a aquela que se seguiria de premissas puramente assertóricas.

Uma vez que esse é seu procedimento, é conveniente descrever

silogismos modais em termos de seus correspondentes silogismos não modais, adicionando uma tripla de letras indicando as modalidades de premissas e conclusões: N = “necessariamente”, P = “possivelmente”, A = “assertórica”. Assim, “Barbara NAN” significaria “A forma *Barbara* com uma premissa maior necessária, premissa menor assertórica, e conclusão necessária”. Também uso as letras “N” e “P” como prefixos; uma premissa sem prefixo é assertórica. Assim, *Barbara* NAN, seria NAab, $Abc \vdash NAac$.

5.6.3. Conversões Modais

Como no caso dos silogismos assertóricos, Aristóteles faz uso de conversões e regras para provar a validade. As regras de conversão para premissas necessárias são exatamente análogas àquelas para premissas assertóricas:

- NEab \rightarrow NEba
- Nlab \rightarrow NIba
- NAab \rightarrow NIba

Premissas possíveis comportam-se de modo diferente, no entanto. Dado que ele define “possível” como “nem necessário nem impossível”, disso resulta que *x é possivelmente F* acarreta, e é acarretado por, *x é possivelmente não F*. Aristóteles generaliza isso para o caso de frases categóricas como segue:

- PAab \rightarrow PEab
- PEab \rightarrow PAab
- Plab \rightarrow POab
- POab \rightarrow Plab

Além disso, Aristóteles usa o princípio intermodal N \rightarrow A: isto é, uma premissa necessária implica a correspondente assertórica. Contudo, por causa de sua definição de possibilidade, o princípio A \rightarrow P não vale em geral: se valesse então N \rightarrow P valeria, mas em sua definição “necessário P” e “possível P” são na verdade inconsistentes (“possível P” implica “possível não P”).

Isso leva a uma complicação adicional. A negação de “possível P” para Aristóteles é “ou necessário P ou necessário não P”. A negação de “necessário P” é ainda mais difícil de expressar em termos de combinação de modalidades: “ou

possível P (e assim, possível não P) ou necessário não P". Isso é importante devido aos procedimentos de prova de Aristóteles, que incluem provas por impossibilidade. Se dermos uma prova por impossibilidade na qual assumimos uma premissa necessária, então a conclusão que estabelecermos ao final é simplesmente a negação dessa premissa necessária, não uma conclusão "possível" no sentido de Aristóteles. Tais proposições ocorrem em seu sistema, porém exclusiva e exatamente desse jeito, isto é, como conclusões estabelecidas por provas através da impossibilidade, a partir de suposições necessárias. De modo um pouco confuso, Aristóteles chama tais proposições de "possíveis" mas imediatamente acrescenta "não no sentido definido": nesse sentido, "possível Oab" é simplesmente a negação de "necessariamente Aab". Tais proposições aparecem apenas como premissas, nunca como conclusões.

5.6.4. Silogismos com Premissas Necessárias

Aristóteles sustenta que um silogismo assertórico permanece válido se "necessariamente" é acrescido à suas premissas e sua conclusão: o modelo padrão NNN é sempre válido. Ele não trata isso como uma consequência trivial, ao invés, oferece provas; em todos, exceto dois casos, elas são paralelas àquelas oferecidas nos casos assertóricos. As exceções são *Baroco* e *Bocardo*, que ele provou no caso assertórico por impossibilidade: tentar usar esse método aqui exigiria que ele tomasse a negação de uma proposição necessária O como hipótese, suscitando a complicação notada acima, e ele é levado a recorrer a uma forma diferente de prova.

5.6.5. Combinações NA/AN: O Problema das "Duas Barbaras" e Outras Dificuldades

Dado que uma premissa necessária implica uma premissa assertórica, toda combinação de premissas AN ou NA implicará o par AA correspondente, e assim a correspondente conclusão A. Desse modo, os silogismos ANA e NAA são sempre válidos. Contudo, Aristóteles sustenta que algumas, mas não todas, combinações ANN e NAN são válidas. Especificamente, ele aceita *Barbara* NAN,

mas rejeita *Barbara ANN*. Quase desde o tempo de Aristóteles, interpretes têm considerado suas razões para essa distinção como sendo obscuras, ou não persuasivas, ou ambas. Teofrasto, por exemplo, adotou a regra mais simples de que a modalidade da conclusão de um silogismo sempre é a modalidade “mais fraca” encontrada em alguma das premissas, onde N é mais forte que A e A é mais forte que P (e onde P provavelmente tem de ser definida como “não necessário não”). Outras dificuldades seguem-se do problema das “Duas Barbaras”, como muitas vezes é chamado, e muitas vezes se tem sustentado que a silogística modal é inconsistente.

Este assunto rapidamente torna-se complexo demais para ser resumido neste breve verbete. Para uma discussão mais profunda, veja Becker, McCall, Patterson, van Rijen, Striker, Nortmann, Thom, e Thomason.

6. Demonstrações e Ciências Demonstrativas

Uma **Demonstração** (*apodeixis*) é “uma dedução que produz conhecimento”. Os *Analíticos Posteriores* de Aristóteles contêm seu tratamento de demonstrações e seu papel no conhecimento. De uma perspectiva contemporânea, poderíamos pensar que esse assunto nos levaria para fora da lógica e para dentro da epistemologia. Da perspectiva de Aristóteles, contudo, a conexão da teoria do *sullogismo* com a teoria do conhecimento é especialmente próxima.

6.1. As Ciências Aristotélicas

O assunto dos *Analíticos Posteriores* é a *epistêmê*. Essa é uma das várias palavras gregas que podem razoavelmente ser traduzidas por “conhecimento”, mas Aristóteles está preocupado apenas com o conhecimento de certo tipo (como será explicado abaixo). Há uma longa tradição em traduzir *epistêmê* nesse sentido técnico como **ciência**, e aqui seguirei essa tradição. Contudo, leitores não devem se confundir com o uso dessa palavra. Em particular, a teoria da ciência de Aristóteles não pode ser considerada uma contraparte da

filosofia da ciência contemporânea, ao menos não sem qualificações substanciais.

Segundo Aristóteles, temos conhecimento científico quando sabemos: a causa pela qual a coisa é, isto é, a causa disso, e que essa não pode ser de outra forma. (*Analíticos Posteriores* I.2)

Isso implica duas condições fortes naquilo que pode ser o objeto de conhecimento científico:

1. Apenas o que é necessariamente o caso pode ser conhecido cientificamente
2. Conhecimento científico é conhecimento de causas

Assim ele passa a considerar em que a ciência, assim definida, consiste, começando com a observação de que, de qualquer modo, uma das formas de ciência consiste na posse de uma **demonstração** (*apodeixis*), que ele define como uma “dedução científica”.

por “científica” (*epistêmonikon*), me refiro àquilo que, em virtude de possuímos, temos conhecimento

O restante dos *Analíticos Posteriores* I é ocupado, em grande medida, com duas tarefas: detalhar a natureza da demonstração e da ciência demonstrativa e responder a um desafio importante à sua própria possibilidade. Aristóteles inicialmente nos diz que uma demonstração é uma dedução na qual as premissas são:

1. verdadeiras
2. **primárias** (*protá*)
3. **imediatas** (*amesa*, “sem um meio”)
4. **melhor conhecidas** ou **mais familiares** (*gnôrimôtera*) que a conclusão
5. anteriores à conclusão
6. **causa** (*aitia*) da conclusão

A interpretação de todas essas condições, com exceção da primeira, tem sido objeto de muita controvérsia. Aristóteles claramente pensa que ciência é conhecimento de causas e que em uma demonstração, o conhecimento das premissas é o que produz o conhecimento da conclusão. A quarta condição mostra que aquele que conhece uma demonstração tem de estar em uma condição epistêmica melhor em relação a elas, de modo que interpretes contemporâneos muitas vezes supõem que Aristóteles definiu aqui um tipo de justificação epistêmica. Contudo, como notado acima, Aristóteles está definindo uma

variedade muito especial de conhecimento. Comparações com discussões de justificação na epistemologia contemporânea podem, por isso, ser enganadoras.

O mesmo pode ser dito dos termos “primário”, “mediato” e “melhor conhecido”. Interpretes contemporâneos às vezes tomam “mediato” como significando “autoevidente”. Aristóteles de fato diz que uma proposição mediata é uma proposição “em relação a qual nenhuma outra é anterior”, mas (como sugiro na próxima seção) a noção de anterioridade envolvida provavelmente é uma noção de anterioridade lógica que é muito difícil de separar das próprias teorias lógicas de Aristóteles. “Melhor conhecida” tem sido interpretada, por vezes, simplesmente como “previamente conhecida a aquele que conhece a demonstração” (isto é, já conhecida antes da demonstração). Contudo, Aristóteles distingue explicitamente entre o que é “melhor conhecido a aquele que conhece a demonstração” do que é “melhor conhecido em si” ou “por natureza”, e diz que se refere a estas em sua definição. De fato, ele diz que o processo de aquisição de conhecimento científico é um processo de *mudar* do que é mais bem conhecido “para nós”, até chegarmos a uma condição na qual o que é mais bem conhecido em si mesmo é também melhor conhecido para nós.

6.2. O Problema do Regresso

Nos *Analíticos Posteriores* I.2, Aristóteles considera dois desafios à possibilidade da ciência. Um grupo começa (chamado de “agnóstico” por Jonathan Barnes) com as seguintes premissas:

1. O que quer que seja conhecido cientificamente tem de ser demonstrado.
2. As premissas de uma demonstração têm de ser cientificamente conhecidas.

Então ele argumenta que a demonstração é impossível, com o seguinte dilema:

1. Se as premissas de uma demonstração são conhecidas cientificamente, então elas têm de ser demonstradas.
2. As premissas, das quais cada premissa é demonstrada, tem de ser conhecidas cientificamente.
3. Ou esse processo continua para sempre, criando um regresso infinito

de premissas, ou ele para em algum ponto.

4. Se ele continua para sempre, então não há premissas primeiras a partir das quais as subsequentes são demonstradas, e assim nada é demonstrado.
5. Por outro lado, se para em algum ponto, então as premissas em que ele para não são demonstradas e, portanto, não são conhecidas cientificamente; conseqüentemente, também não o são as outras deduzidas a partir delas.
6. Portanto, nada pode ser demonstrado.

Um segundo grupo aceitou a concepção dos agnósticos de que o conhecimento científico provém apenas da demonstração, mas rejeitou sua conclusão, rejeitando o dilema. Em vez disso, eles sustentaram:

A demonstração “em um círculo” é possível, de tal modo que é possível que todas as premissas também sejam conclusões e, portanto, sejam demonstradas.

Aristóteles não nos fornece muita informação sobre como as demonstrações circulares deveriam funcionar, mas a interpretação mais plausível seria supor que ao menos para algum conjunto de princípios fundamentais cada princípio poderia ser deduzido de outros. (Alguns intérpretes contemporâneos comparam essa posição com uma teoria coerentista do conhecimento.) Independente de como funcione a posição deles, os demonstradores circulares afirmaram ter uma terceira alternativa, evitando o dilema agnóstico, dado que demonstrações circulares nos fornecem um regresso que é tanto infinito (no sentido de que nunca alcança as premissas em que ele para) quanto finito (pois ele gira ao redor do círculo finito de premissas).

6.3. A solução de Aristóteles: “Em algum momento isso chega ao fim”.

Aristóteles rejeita a demonstração circular como uma noção incoerente, alegando que as premissas de qualquer demonstração têm de serem anteriores

(em sentido apropriado) à conclusão, enquanto que uma demonstração circular tornaria as mesmas premissas tanto anteriores como posteriores umas às outras (e na verdade, toda premissa seria anterior e posterior a si mesma). Ele concorda com a análise dos agnósticos do problema do regresso: as únicas opções plausíveis são que ele continua indefinidamente ou que ele “para” em algum ponto. Contudo, ele pensa que tanto os demonstradores agnósticos quanto os circulares estão errados ao sustentar que o conhecimento científico só é possível por demonstração de premissas cientificamente conhecidas: em vez disso, ele afirma, há outra forma de conhecimento possível para as premissas primeiras, e isso fornece o ponto inicial para as demonstrações.

Para resolver esse problema, Aristóteles tem de fazer algo bem específico. Não é suficiente, para ele, estabelecer que possamos ter conhecimento de *algumas proposições* sem demonstrá-las: a menos que seja possível, por sua vez, deduzir delas todas as outras proposições de uma ciência, não teremos solucionado o problema do regresso. Ademais (e obviamente), para Aristóteles não é uma solução para esse problema simplesmente *asserir* que temos conhecimento sem demonstração de alguns pontos de partida apropriados. Ele realmente diz que é a posição dele, que temos tal conhecimento (*Analíticos Posteriores* I.2), mas fica nos devendo uma explicação do por quê isso deveria ser assim.

6.4. O Conhecimento dos Primeiros Princípios: *Nous*

O tratamento de Aristóteles do conhecimento das premissas primeiras indemonstráveis das ciências encontra-se nos *Analíticos Posteriores* II.19, há muito considerado como um texto de difícil interpretação. Resumidamente, o que ele diz ali é que há outro estado cognitivo, *nous* (traduzido de varias formas, como “insight”, “intuição”, “inteligência”), que os conhece. Há muita discórdia entre os comentadores sobre a interpretação da sua concepção de como esse estado é alcançado. Oferecerei uma interpretação possível. Primeiro Aristóteles identifica seu problema como o de explicar como os princípios podem “se tornar familiares para nós”, usando o mesmo termo “familiar” (*gnôrimos*) que ele utilizou ao apresentar o problema do regresso. O que ele está apresentando não é um método de descoberta, mas um processo de tornar-se sábio. Segundo, ele diz que

para que seja possível o conhecimento de premissas imediatas, temos que ter um tipo de conhecimento delas sem as termos aprendido, mas esse conhecimento não precisa ser tão “preciso” quanto o conhecimento que um possuidor de conhecimento científico tem de ter. O tipo de conhecimento em questão revela-se uma capacidade ou poder (*dunamis*) que Aristóteles compara à capacidade de percepção sensorial: dado que nossos sentidos são inatos, isto é, desenvolvem-se naturalmente, de certo modo é correto dizer que sabemos, por exemplo, como todas as cores se parecem antes de vê-las: temos, por natureza, a capacidade de vê-las, e quando vemos uma cor pela primeira vez exercitamos essa capacidade sem antes ter aprendido como assim o fazer. Do mesmo modo, sustenta Aristóteles, nossas mentes possuem por natureza a capacidade de reconhecer os pontos iniciais das ciências.

No caso da sensação, a capacidade de percepção no órgão sensorial é atualizada pela operação do objeto perceptível sobre ele. De modo semelhante, Aristóteles sustenta que chegar ao conhecimento das premissas primeiras é uma questão de uma potencialidade sendo atualizada na mente por meio das experiências de seus objetos próprios: “A alma é de tal natureza que é capaz de experimentar isso”. Desse modo, embora não possamos vir a conhecer as premissas primeiras sem a experiência necessária, assim como não podemos ver cores sem a presença de objetos coloridos, nossas mentes já estão constituídas de tal modo que são capazes de reconhecer os objetos corretos, assim como nossos olhos estão assim constituídos para serem capazes de perceber as cores que existem.

É consideravelmente menos claro o que esses objetos são e como é que a experiência atualiza as possibilidades relevantes na alma. Aristóteles descreve uma série de estágios da cognição. Inicialmente é o que é comum a todos os animais: percepção do que está presente. Em seguida a memória, que ele considera como uma retenção de uma sensação: apenas alguns animais possuem essa capacidade. Um número ainda menor possui a capacidade seguinte, de formar uma experiência singular (*empeiria*) a partir de muitas repetições da mesma memória. Finalmente, muitas experiências repetidas fazem surgir conhecimento de uma universal único (*katholou*). Essa última capacidade está presente apenas em humanos.

Ver a seção 7 do verbete da psicologia de Aristóteles para detalhes sobre sua concepção de mente.

7. Definições

A **definição** (*horos, horismos*) foi um assunto importante para Platão e nos anos iniciais da Academia. A preocupação em responder a questão “O que é tal-e-tal?” está no centro da maioria dos *Diálogos* de Platão, alguns dos quais (mais elaboradamente, *O Sofista*) propõem métodos para encontrar definições. Fontes externas (às vezes observações satíricas de comediantes) também refletem essa preocupação da Academia com definições. O próprio Aristóteles remonta a busca por definição de volta a Sócrates.

7.1. Definições e Essências

Para Aristóteles, uma definição é “uma explicação que significa o que é ser algo” (*logos ho to ti ên einai sêmeinei*). A expressão “o que é ser” e suas variantes são cruciais: dar uma definição é dizer, de algo existente, o que isso é, não simplesmente especificar o significado de uma palavra (Aristóteles reconhece definições de último tipo, porém possui pouco interesse nelas).

A noção de “o que é ser” para alguma coisa é tão difundida em Aristóteles que se ela se torna formular: o que uma definição expressa é “o que-é-ser” (*to ti ên einai*). Tradutores romanos, aborrecidos com essa expressão grega estranha, criaram uma palavra para ela, *essentia*, da qual nossa “essência” descende. Assim, uma definição aristotélica é uma explicação da essência de algo.

7.2. Species, Genus, e Differentia

Dado que uma definição define uma essência, apenas o que possui essência pode ser definido. O que, então, possui uma essência? Essa é uma das questões centrais da metafísica de Aristóteles; mais uma vez, temos de deixar os detalhes para outro artigo. Em geral, contudo, não são indivíduos, mas sim **espécies** (*eidos*: a palavra é uma das que Platão utiliza para “Forma”) que possuem essências. Uma espécie é definida fornecendo-se seu **gênero** (*genos*) e sua **diferença** (*diaphora*): o gênero é o tipo sob o qual a espécie cai, e a

diferença diz o que caracteriza a espécie dentro do gênero. Como exemplo, *humano* pode ser definido como *animal* (o gênero) *tendo a capacidade de raciocinar* (a diferença).

Predicação Essencial e os Predicáveis

Subjacente ao conceito de definição em Aristóteles está o conceito de **predicação essencial** (*katêgoreisthai em tõi ti esti*, predicação naquilo que é). Em qualquer predicação afirmativa verdadeira, o predicado ou “diz o que o sujeito é” ou não, isto é, o predicado ou é ou não é uma resposta aceitável para a questão “O que é isto?” perguntado de um objeto. Bucéfalo é um cavalo, e um cavalo é um animal; assim “Bucéfalo é um cavalo” e “Bucéfalo é um animal” são predicções essenciais. Contudo, “Bucéfalo é marrom”, embora verdadeiro, não diz o que Bucéfalo é, mas apenas diz alguma coisa a seu respeito.

Dado que a definição de uma coisa diz o que ela é, definições são predicadas essencialmente. Contudo, nem tudo essencialmente predicado é uma definição. Uma vez que Bucéfalo é um cavalo, e cavalos são um tipo de mamífero, e mamíferos são um tipo de animal, “cavalo”, “mamífero” e “animal” são todos predicados essenciais de Bucéfalo. Além disso, uma vez que um cavalo é um tipo de mamífero, “mamífero” é um predicado essencial de cavalo. Quando um predicado X é um predicado essencial de Y, mas também de outras coisas, então X é um **gênero** (*genos*) de Y.

Uma definição de X tem de não apenas ser predicada essencialmente dele, mas também ser predicada apenas dele: para utilizar um termo dos *Tópicos* de Aristóteles, uma definição e o que ela define têm de ser “contrapredicativas” (*antikátêgoreisthai*) uma com a outra. X contrapredica com Y se X se aplica ao que Y se aplica e vice-versa. Embora a definição de X tenha de contrapredicar com X, nem tudo que contrapredica X é sua definição. “Ser capaz de rir”, por exemplo, contrapredica com “humano”, mas falha em ser sua definição. Tal predicado (não essencial, mas contrapredicando) é uma **propriedade peculiar** ou **própria** (*idion*).

Finalmente, se X é predicado de Y, mas não é nem essencial nem contrapredicado, então X é um **acidente** (*sumbebêkos*) de Y.

Aristóteles às vezes trata gênero, propriedade peculiar, definição, e acidente como incluindo todas as possíveis predicções (por exemplo, nos *Tópicos* I). Comentaristas posteriores listaram essas quatro e a diferença como

os cinco **predicáveis**, e como tais eles foram de grande importância para a filosofia antiga tardia e para a filosofia medieval (por exemplo, Porfírio).

7.3. As Categorias

A noção de predicação essencial está conectada àquilo que é tradicionalmente chamado **categorias** (*katêgoriai*). Em resumo, Aristóteles é famoso por ter mantido a “doutrina das categorias”. O que exatamente foi essa doutrina, e o que de fato é uma categoria são questões consideravelmente mais complicadas. Elas rapidamente nos tiram da sua lógica e colocam em sua metafísica. Tentarei aqui dar um panorama muito geral aqui, começando com a questão um pouco mais simples “Que categorias existem?”.

Podemos responder essa questão listando as *Categorias*. Aqui temos duas passagens contendo tais listas:

Deveríamos distinguir os tipos de predicação (*ta gene katêgoriôn*) nas quais as quatro predicações mencionadas são encontradas. Em número, são dez: essência [o que é], quantidade, qualidade, relação, espaço [onde], tempo [quando], posição [estar em], estado, ação [fazer], paixão [sofrer]. Um acidente, um gênero, uma propriedade particular e uma definição sempre estarão em uma dessas categorias. (*Topics* I.9, 103b20-25)

Das coisas ditas sem qualquer combinação, cada uma significa ou substância ou quantidade ou qualidade ou um relativo ou onde ou quando ou estar-em-uma-posição ou estado ou fazer ou passar por. Para dar uma ideia aproximada, exemplos de substância são homem, cavalo; de quantidade: quatro pés, cinco pés; de qualidade: branco, alfabetizado; de relativo: dobro, metade, mais largo; de onde: no Liceu, no mercado; de quando: ontem, ano passado; de estar-em-uma-posição: sentado, deitado; de estado: calçado, armado; de fazer: cortar, queimar; de passar por: ser queimado, ser cortado. (Categorias 4, 1b25-2a4, tr. Ackrill, tradução levemente modificada)

Essas duas passagens fornecem listas de dez itens, idênticas no primeiro membro. *Sobre o que* são as listas? Aqui estão três maneiras nas quais elas podem ser interpretadas:

A palavra “categoria” (*katêgoria*) significa “predicação”. Aristóteles sustenta que predicações e predicados podem ser agrupados em vários “tipos de predicação” mais amplos (*gene tôn katêgoriôn*). Ele frequentemente se refere a essa classificação, chamando os “tipos de predicação” simplesmente de “as predicações”, e isso (por meio do Latim) leva a nossa palavra “categoria”.

Primeira, as categorias podem ser *tipos de predicado*: predicados (ou, mais precisamente, expressões predicativas) podem ser divididos em dez classes separadas, onde cada expressão pertence apenas a uma. Isso se adequa bem ao significado original da palavra *katêgoria* (“predicação”). Nessa interpretação, as categorias surgem ao considerar os tipos de questões mais gerais que podem ser feitas de algo: “O que é isso?”, “Quanto é isso?”, “De que tipo ele é?”, “Onde fica isso?”, “O que isso está fazendo?”. Respostas apropriadas a uma dessas perguntas para outras são absurdas (“Quando é isso?” “Um cavalo”). Assim, as categorias podem excluir certos tipos de perguntas como sendo mal formadas ou confusas. Isso desempenha um papel importante na metafísica de Aristóteles.

Segunda, as categorias podem ser vistas como classificações de *predicações*, isto é, tipos de relação que podem ser mantidas entre um predicado e o sujeito da predicação. Dizer de Sócrates que ele é humano é dizer que ele *é*, enquanto dizer que ele é alfabetizado não é dizer o que ele é, mas sim dar uma qualidade que ele *possui*. Para Aristóteles, a relação do predicado com o sujeito nessas duas frases é bem diferente (a esse respeito, ele difere tanto de Platão quanto dos lógicos contemporâneos). As categorias podem ser interpretadas como dez modos diferentes pelos quais um predicado pode ser relacionado com o sujeito. Essa última divisão tem importância para a lógica de Aristóteles, bem como para sua metafísica.

Terceira, as categorias podem ser vistas como *tipos de entidades*, como os mais altos gêneros ou tipos de coisas que existem. Uma dada coisa pode ser classificada sob uma série de gêneros progressivamente mais amplos: Sócrates é um humano, um mamífero, um animal, um ser-vivo. As categorias são os gêneros mais elevados. Cada uma cai sob nenhum outro gênero, e cada uma é completamente separada das outras. Essa distinção é de importância crucial para a metafísica de Aristóteles.

Qual dessas interpretações se encaixa melhor às duas passagens acima? A resposta aparenta ser diferente nos dois casos. Isso fica mais evidente se notarmos o ponto em que elas diferem: as *Categorias* listam **substância** (*ousia*) em primeiro lugar, enquanto os *Tópicos* listam **essência** (*ti esti*). Uma substância, para Aristóteles, é um tipo de entidade, sugerindo que a lista das *Categorias* é uma lista de tipos de entidades.

Por outro lado, a expressão “essência [o-que-isso-é]” sugere um tipo mais forte de predicação. De fato, os *Tópicos* confirmam isso dizendo-nos que podemos

“dizer o que isso é” de uma entidade que cai sob qualquer das categorias:

uma expressão significando essência [o-que-isso-é] às vezes significará uma substância, às vezes uma quantidade, às vezes uma qualidade, e às vezes uma das outras categorias.

Como explica Aristóteles, se digo que Sócrates é um homem, então terei dito o que Sócrates é, e significado uma substância; se digo que branco é uma cor, então terei dito que branco é e significa uma qualidade; se digo que uma distância possui um pés de comprimento, então terei dito que ela é, e significa uma quantidade; e assim por diante para as outras categorias. Essência [o-que-é], desse modo, designa aqui um tipo de predicação, não um tipo de entidade.

Isso pode nos levar a concluir que as categorias nos *Tópicos* devem ser interpretadas apenas como tipos de predicado ou predicação, e aquelas nas *Categorias* como modos de ser. Mesmo assim, ainda poderíamos querer perguntar qual a relação entre essas duas listas de termos quase idênticas, dadas essas interpretações distintas. Contudo, a situação é bem mais complicada. Primeiro, há dezenas de outras passagens nas quais as categorias aparecem. Em nenhum outro lugar encontramos uma lista de dez, mas encontramos listas menores, contendo oito, ou seis, ou cinco, ou quatro delas (com substância/essência, qualidade, quantidade, e os relativos sendo os mais comuns). Aristóteles descreve aquilo de que essas listas tratam de modos diferentes: elas nos dizem “como o ser é dividido”, ou “de quantas maneiras o ser é dito”, ou “as figuras da predicação” (*ta schêmata tês katêgorias*). A designação da primeira categoria também varia: não encontramos apenas “substância” e “essência”, mas também as expressões “isto” ou “o isto” (*tode ti, to tode, to ti*). Essas últimas expressões são intimamente associadas com, mas não são sinônimas, a de substância. Ele chega a combinar a última com “essência [o-que-isso-é]” (*Metafísica Z 1, 1028a10*: “... um sentido significa o que isto é e o isto, outro significa qualidade...”).

Ademais, para Aristóteles as substâncias são fundamentais para a predicação e metafisicamente fundamentais. Ele nos diz que tudo que existe, existe por que substâncias existem: se não houvesse substância, não haveria nada. Ele também concebe a predicação como refletindo uma relação metafísica (ou talvez mais do que uma, dependendo do tipo de predicação). A frase “Sócrates é branco” obtém sua verdade de um estado de coisas consistindo de uma substância (Sócrates) e uma qualidade “brancura”, que está nessa substância.

Nesse ponto, afastamo-nos muito da lógica de Aristóteles adentrando em sua metafísica, cuja questão fundamental, de acordo com Aristóteles, é “O que é uma substância?”. (Para discussões adicionais desse tópico, ver o verbete da metafísica de Aristóteles, e em particular, a Seção 2 do verbete das categorias)

Ver Frede 1981, Ebert 1985 para uma discussão adicional sobre as listas de categorias de Aristóteles.

Por conveniência de referência, incluí uma tabela de categorias, junto com exemplos de Aristóteles e os nomes tradicionais frequentemente utilizados para elas. Pelas razões expressas acima, tratei o primeiro item da lista bem diferente, dado que um exemplo de substância e um exemplo de essência [o-que-é] estão necessariamente (como alguém poderia notar) em categorias diferentes.

Nome Tradicional	Literalmente	Grego	Exemplos
(Substância)	Substância “isso” Essência [o-que-isso-é]	<i>ousia tode ti ti esti</i>	homem, cavalo Sócrates “Sócrates é um homem”
Quantidade	Quanto	<i>Poson</i>	quatro pés, cinco pés
Qualidade	Que tipo	<i>Poion</i>	branco, alfabetizado
Relação	Relativo a que	<i>pros ti</i>	dobro, metade, maior
Lugar	Onde	<i>Pou</i>	no Liceu, no mercado
Tempo	Quando	<i>Pote</i>	ontem, ano passado
Posição	Estando situado	<i>keisthai</i>	sentado, deitado

Estado	Tendo, possuindo	<i>Echein</i>	calçado, armado
Ação	Fazendo	<i>poiein</i>	corta, queima
Paixão	Através	<i>paschein</i>	cortado, queimado

7.4. O Método de Divisão

No *Sofista*, Platão introduz um processo de “Divisão” como método para descobrir definições. Para encontrar uma definição de X, primeiro encontre a maior classe de coisa sob a qual X cai; a seguir, divida essa classe em duas partes, e decida em qual das duas X cai. Repita esse método com a classe até que X esteja completamente localizado.

Esse método é parte do legado platônico de Aristóteles. Sua atitude frente a isso, contudo, é complexa. Ele adota uma concepção da estrutura própria das definições que está intimamente aliada a isso: uma definição correta de X deveria fornecer o **gênero** (*genos*: classe ou família) de X, que dirá que tipo de coisa X é, e a **diferença** (*diaphora*: diferença) que identifica X de modo único dentro daquele gênero. Algo definido dessa maneira é uma **espécie** (*eidōs*: o termo é um dos termos de Platão para “Forma”), e a diferença é, desse modo, “diferença que produz uma espécie” (*eidopoios diaphora*, “diferença específica”). Nos *Analíticos Posteriores* II.13, ele fornece sua própria explicação do uso da Divisão para encontrar definições.

Contudo, Aristóteles é fortemente crítico da concepção Platônica da Divisão como um método para *estabelecer* definições. Nos *Analíticos Anteriores* I.31, ele contrasta Divisão com o método silogístico que acabara de apresentar, argumentando que a Divisão na verdade não pode provar nada, mas sim assume exatamente aquilo que deveria ser provado. Ele também acusa os partidários da Divisão de falharem em entender o que seu próprio método seria capaz de provar.

7.5. Definição e Demonstração

Intimamente ligado a isso está a discussão, nos *Analíticos Posteriores* II.3-10, da questão de se pode haver tanto definição quanto demonstração da mesma coisa. Dado que as definições nas quais Aristóteles está interessado são declarações de essências, saber uma definição é saber, de alguma coisa, o que ela é.

Consequentemente, a questão de Aristóteles equivale à questão de saber se definir e demonstrar podem ser vias alternativas de adquirir o mesmo conhecimento. Sua resposta é complexa:

1. Nem tudo que é demonstrável pode ser conhecido pela descoberta de definições, uma vez que todas as definições são universais e afirmativas, enquanto que algumas proposições demonstráveis são negativas.
2. Se uma coisa é demonstrável, então conhecê-la equivale a possuir sua demonstração; portanto, ela não pode ser conhecida apenas por definição.
3. Contudo, algumas definições podem ser compreendidas como demonstrações organizadas de formas diferentes.

Como exemplo do caso 3, Aristóteles considera a definição “O trovão é a extinção do fogo nas nuvens”. Ele vê isso como uma forma comprimida e rearranjada desta demonstração:

- O som acompanha a extinção de fogo.
- O fogo é extinto nas nuvens.
- Portanto, um som ocorre nas nuvens.

Podemos ver a conexão ao considerarmos as respostas para o par de questões: “O que é o trovão?” “A extinção de fogo nas nuvens” (definição). “Por que troveja?” “Porque o fogo é extinto das nuvens” (demonstração).

Como em suas críticas da Divisão, Aristóteles está argumentando em favor da superioridade de seu próprio conceito de ciência com relação ao conceito

Platônico. Conhecimento é composto de demonstrações, mesmo que também possa incluir definições; o método da ciência é demonstrativo, mesmo que também possa incluir o processo de definir.

8. Argumentos Dialéticos e a Arte da Dialética

Aristóteles frequentemente contrasta *argumentos dialéticos* com demonstrações. A diferença, ele nos diz, está no caráter de suas premissas, não em sua estrutura lógica: se um argumento é um *sullogismos* é apenas uma questão de se sua conclusão resulta necessariamente de suas premissas. As premissas das demonstrações têm de ser *verdadeiras e primárias*, isto é, não apenas verdadeiras, mas também anteriores às suas conclusões, no sentido explicado nos *Analíticos Posteriores*. As premissas de deduções dialéticas, em contraste, devem ser **aceitas** (*endoxos*).

8.1. Premissas Dialéticas: O Significado de *Endoxos*

Estudiosos contemporâneos têm proposto interpretações diferentes do termo *endoxos*. Aristóteles frequentemente utiliza esse adjetivo como um substantivo: *ta endoxa*, “coisas aceitas”, “opiniões aceitas”. Uma compreensão disso descende do trabalho de G. E. L. Owen e foi mais plenamente desenvolvida por Jonathan Barnes e especialmente Terence Irwin, onde as *endoxa* são uma compilação de visões defendidas por várias pessoas com uma ou outra forma de entendimento: “as concepções de pessoas razoavelmente reflexivas”, nas palavras de Irwin. Assim a dialética é simplesmente “um método de argumentação a partir das crenças comuns sustentadas por essas pessoas”. Para Irwin, então, *endoxa* são “crenças comuns”. Jonathan Barnes, notando que *endoxa* são opiniões acompanhadas de certo entendimento, traduz por “respeitável”.

Meu próprio ponto de vista é que os textos de Aristóteles embasam uma compreensão um pouco diferente. Ele também nos diz que premissas dialéticas diferem das demonstrativas na medida em que aquelas são *questões*, enquanto estas são *suposições* ou *asserções*: “o demonstrador não pergunta, mas assume”,

ele diz. Isso se encaixa mais naturalmente com a concepção da dialética enquanto argumento dirigido para outra pessoa através de perguntas e respostas e, conseqüentemente, tomando por premissas as concessões da outra pessoa.

Qualquer um que argumente dessa maneira, a fim de ser bem sucedido, precisa requerer premissas que o interlocutor está disposto a aceitar, e a melhor maneira de fazer isso é possuir um inventário de premissas aceitáveis, isto é, premissas que são de fato aceitáveis para diferentes tipos de pessoas.

De fato, podemos discernir nos *Tópicos* (e na *Retórica*, que Aristóteles diz depender da arte explicada nos *Tópicos*) uma arte da dialética para ser usada em tais argumentos. Minha reconstrução dessa arte (que não será aceita por todos os estudiosos) é como segue.

8.2. Os Dois Elementos da Arte da Dialética

Dada a imagem acima, sobre o argumento dialético, a arte dialética consistirá de dois elementos. Um será um método de descobrir premissas a partir das quais uma dada conclusão se segue, enquanto o outro será um método para determinar quais premissas um interlocutor dado estará inclinado a conceder. A primeira tarefa é realizada pelo desenvolvimento de um sistema para classificação de premissas de acordo com sua estrutura lógica. Poderíamos esperar aqui que Aristóteles se valesse da silogística, mas na realidade ele desenvolve uma abordagem bem diferente, que parece menos sistemática e se assenta sobre vários termos “comuns”. A segunda tarefa é realizada através do desenvolvimento de listas de premissas que são aceitáveis para vários tipos de interlocutores. Então, uma vez que sabemos com que tipo de pessoa estamos lidando, é possível escolher as premissas adequadas. Aristóteles salienta que, como em todas as artes, o dialético tem de estudar não o que é aceitável para esta ou aquela pessoa específica, mas o que é aceitável para este ou aquele tipo de pessoa, assim como o médico estuda o que é saudável para diferentes tipos de pessoas: “a arte é do universal”.

8.2.1. O “Sistema Lógico” dos *Tópicos*

O método para classificação de argumentos apresentado nos *Tópicos* assenta-se na presença de termos “comuns” (*koina*) na conclusão – comuns no sentido de que eles não são peculiares a nenhum assunto, mas podem cumprir um papel em argumentos sobre qualquer outra coisa. Encontramos enumerações de argumentos envolvendo esses termos, em uma ordem várias vezes semelhante.

Tipicamente elas incluem:

- I. Opostos (*antikeimena, antitheseis*)
 1. Contrárias (*enantia*)
 2. Contraditórias (*apophaseis*)
 3. Posseção e Privação (*hexis kai sterêsis*)
 4. Relativos (*pros ti*)
- II. Casos (*ptôseis*)
- III. “Mais e Menos e Do Mesmo Modo”

Os quatro tipos de opostos são os melhor representados. Cada um designa um tipo de par de termos, isto é, um modo no qual dois termos podem ser mutuamente opostos. **Contrários** são opostos polares ou extremos opostos, tais como quente e frio, seco e molhado, bom e mau. Um par de **contraditórios** consiste em um termo e sua negação: bom, não-bom. Uma **posseção** (ou condição) e uma **privação** são ilustradas pela visão e cegueira. **Relativos** são termos relativos em sentido contemporâneo: um par consiste de um termo e seu correlativo, por exemplo, grande e pequeno, pais e filhos.

Os padrões argumentativos de Aristóteles associados à **casos** geralmente envolvem inferir uma frase que contém advérbios ou formas declinadas de outra frase, que contém formas diferentes do mesmo radical: “se o que é útil é bom, então o que é feito de modo útil é bem feito e a pessoa útil é boa”. No uso gramático helenístico, *ptôsis* significaria “caso” (por exemplo, nominativo, dativo, acusativo).

O uso de Aristóteles aqui é obviamente uma forma inicial disso.

Sob o título **mais e menos e do mesmo modo**, Aristóteles agrupa uma

variedade um tanto heterogênea de padrões argumentativos envolvendo, de algum modo, os termos “mais”, “menos”, e “do mesmo modo”. Exemplos: “Se o que quer que seja A é B, então o que quer que seja mais (menos) A é mais (menos) B”; “Se A é mais provavelmente B do que C é, e A não é B, então C também não o é”; “Se A é mais provavelmente B e B é o caso, então A é o caso”.

8.2.2. Os *Topoi*

No coração dos *Tópicos* se encontra uma coleção daquilo que Aristóteles chama *topoi*, “lugares” ou “localizações”. Infelizmente, embora esteja claro que ele entenda a maior parte dos *Tópicos* (Livros II-VI) como uma coleção desses, ele nunca definiu esse termo explicitamente. Discussões podem ser encontradas em Brunschwig 1967, Slomkowski 1996, Primavesi 1997, e Smith 1997.

8.3. Os Usos de Dialético e Argumento Dialético

Uma *arte* da dialética será útil onde um argumento dialético for útil. Aristóteles menciona três desses usos; cada um merece um comentário.

8.3.1. Dialética da Ginástica

Primeiramente, parece ter havido uma forma de troca argumentativa estilizada praticada na Academia, no tempo de Aristóteles. O principal indício para isso é simplesmente os *Tópicos* de Aristóteles, especialmente o Livro VIII, que frequentemente faz referência a procedimentos regrados, aparentemente tomando-os como de entendimento certo por parte do público. Nessas trocas, um participante assumia o papel de respondente, o outro de questionador. O respondente iniciava asserindo alguma proposição (uma *tese*: “posição” ou “aceitação”). O questionador então fazia questões ao respondedor na tentativa de assegurar concessões das quais uma contradição pudesse ser deduzida: isto é,

refutar (*elenchein*) a posição do respondedor. O questionador era limitado às questões que poderiam ser respondidas com sim e não: geralmente, o respondedor apenas podia responder com sim e não, embora em alguns casos os respondentes pudessem objetar em forma de pergunta. Respondentes poderiam tentar responder de acordo com pontos de vista de um tipo particular de pessoa, ou de uma pessoa participante (por exemplo, um filósofo famoso), ou poderiam responder de acordo com suas próprias crenças. Aparentemente havia juízes árbitros no processo. Concursos de ginástica dialética algumas vezes tiveram, como o nome sugere, a finalidade de exercitar o desenvolvimento da habilidade argumentativa, mas também podem ter sido exercidos como parte de um processo investigativo.

8.3.2. Dialética que Põe à Prova

Aristóteles também menciona uma “arte de fazer julgamento”, ou uma variedade de argumento dialético que “põe à prova” (a palavra Grega é o adjetivo *peirastikê*, no feminino: tais expressões frequentemente designam artes ou habilidades, por exemplo, *rhêtorikê*, “a arte da retórica”). Sua função é examinar as afirmações daqueles que dizem possuir algum conhecimento, e ela pode ser praticada por alguém que não possui o conhecimento em questão. O exame é um meio de refutação, baseado no princípio que aquele que sabe um assunto deve ter crenças consistentes sobre ele: desse modo, se você pode mostrar-me que minhas crenças sobre algo levam a uma contradição, então você terá me mostrado que não tenho conhecimento sobre isso.

Isso é uma reminiscência forte do estilo de interrogação de Sócrates, do qual é descendente praticamente certo. De fato, Aristóteles muitas vezes indica que argumentos dialéticos são *refutativos* [*refutative*] por natureza.

8.3.3. Dialética e Filosofia

A refutação dialética não pode por si só estabelecer qualquer proposição (exceto talvez a proposição de que alguns conjuntos de proposições são

inconsistentes). Mais especificamente, embora deduzir uma contradição de minhas crenças possa mostrar que elas não constituem conhecimento, falhar em deduzir uma contradição delas não é uma prova de que elas são verdadeiras. Não surpreende que Aristóteles muitas vezes insista que “a dialética não prova nada” e que a arte dialética não é um tipo de conhecimento universal.

Nos *Tópicos* I.2, contudo, Aristóteles diz que a arte da dialética é útil em conexão com “as ciências filosóficas”. Uma razão que ele fornece para isso segue de perto a função refutativa: se submetemos nossas opiniões (e as opiniões dos nossos colegas, e dos sábios) a uma análise refutativa minuciosa, estaremos em uma posição muito melhor para julgar o que mais facilmente é verdadeiro e falso. De fato, encontramos tal procedimento no começo de muitos dos tratados de Aristóteles: uma enumeração das opiniões correntes sobre o assunto junto com uma compilação de “problemas” suscitados por essas opiniões. Aristóteles possui um termo especial para esse tipo de revisão: uma *diaporia*, um “através de uma problematização”.

Ele acrescenta um segundo uso que é mais difícil de compreender e mais intrigante. Os *Analíticos Posteriores* argumentam que se alguma coisa pode ser provada, então nem tudo que é conhecido é conhecido como resultado de prova. Que meios alternativos existem pelos quais os primeiros princípios são conhecidos? A própria resposta de Aristóteles como encontrada nos *Analíticos Posteriores* II.19 é difícil interpretar, e filósofos recentes frequentemente a acharam insatisfatória, dado que (como frequentemente é interpretado) ela parece comprometer Aristóteles com uma forma de apriorismo ou racionalismo, ambas indefensáveis em si mesmas e não consoantes com sua própria insistência sobre a indispensabilidade da investigação empírica na ciência natural.

Contra esse pano de fundo, a seguinte passagem nos *Tópicos* I.2 pode ter importância especial:

também é útil uma ligação com as coisas primeiras concernentes a cada ciência. Pois é impossível dizer qualquer coisa sobre a ciência que está sob consideração com base em seus próprios princípios peculiares, dado que os princípios são anteriores a tudo, e temos de lidar com eles por meio do que é geralmente aceito sobre cada um. Mas isso é peculiar, ou mais próprio, à dialética: pois dado que ela é investigatória com respeito aos princípios de todas as ciências, ela possui um modo de proceder.

Vários interpretadores (começando com Owen 1961) sustentam a partir dessa passagem e outras que a dialética está no coração do método filosófico de Aristóteles. Uma discussão adicional desse problema nos levaria para muito além

do assunto desse artigo (o desenvolvimento mais completo está em Irwin 1988; ver também, Nussbaum 1986 e Bolton 1990; para críticas, Hamlyn 1990, Smith 1997).

9. Dialética e Retórica

Aristóteles diz que a retórica, isto é, o estudo do discurso persuasivo, é uma “contraparte” (*antistrophos*) da dialética e que a arte retórica é um tipo de “desenvolvimento” (*paraphues ti*) da dialética e o estudo dos tipos de caráter. A correspondência com o método dialético é direta: discursos retóricos, tal como argumentos dialéticos, buscam persuadir outros a aceitar certas conclusões com base em premissas que eles já aceitaram. Portanto, as mesmas medidas úteis em contextos dialéticos serão, *mutatis mutandis*, úteis aqui: saber em quais premissas uma plateia de certo tipo está inclinada a acreditar, e saber como encontrar premissas das quais as conclusões pretendidas se sigam.

A *Retórica* não se encaixa nessa descrição geral: Aristóteles inclui tanto as discussões de tipos de pessoas ou audiências (com generalizações sobre aquilo em que cada tipo tende a acreditar) quanto uma versão resumida (em II.23) dos padrões de argumento discutidos nos *Tópicos*. Para uma discussão adicional de sua retórica, ver a retórica de Aristóteles.

10. Argumentos Sofísticos

Demonstrações e argumentos dialéticos são, para Aristóteles, formas de argumentos válidos. Contudo, ele também estuda o que ele chama de **controversos** (*eristikos*) ou argumentos **sofísticos**: esses ele define como argumentos que estabelecem suas conclusões apenas aparentemente. De fato, Aristóteles define esses *dialectical sullogismoi* como aparentes (mas não genuínos). Eles podem ter a aparência de duas formas:

1. Argumentos nos quais a conclusão apenas parece que se segue necessariamente das premissas (*sullogismoi* aparentes, mas não

genuinamente).

2. *Sullogismois* genuínos, onde apenas as premissas são aparentes, mas não genuinamente aceitáveis.

Argumentos do primeiro tipo, em termos contemporâneos, aparentam ser válidos, mas na realidade são inválidos. Argumentos do segundo tipo são, inicialmente, mais difíceis de entender: dado que aceitabilidade tem a ver com o que as pessoas acreditam, poderia parecer que aquilo que parece ser *endoxos* na verdade deve ser *endoxos*. Contudo, Aristóteles provavelmente tem em mente argumentos com premissas que podem, à primeira vista, parecer aceitáveis, mas que, com maior reflexão, rapidamente notamos que não são aceitáveis. Considere este exemplo da época de Aristóteles:

- Tudo que você não tiver perdido você ainda tem.
- Você não perdeu chifres.
- Portanto, você tem chifres.

Isso é claramente um argumento ruim, mas o problema não é que é inválido: em vez disso, o problema é que a primeira premissa, embora superficialmente plausível, é falsa. De fato, qualquer um com um pouco de habilidade para acompanhar um argumento perceberá isso imediatamente ao ver esse argumento.

O estudo de Aristóteles de argumentos sofisticos está contido nas *Refutações Sofísticas*, que na verdade é uma espécie de apêndice aos *Tópicos*.

Em uma notável extensão, discussões contemporâneas sobre falácias reproduzem as próprias classificações de Aristóteles. Veja Dorion 1995 para discussões adicionais.

11. Não Contradição e Metafísica

Dois temas frequentes no tratamento da ciência por Aristóteles são (1) que os primeiros princípios das ciências não são demonstráveis e (2) que não há uma única ciência universal incluindo todas as outras como suas partes. “Todas

as coisas não estão em um único gênero”, ele diz, “e mesmo se estivessem, todos os seres não poderiam cair sob os mesmos princípios” (*Refutações Sofísticas* 11). Assim, é exatamente a aplicabilidade universal da dialética que o leva a negar-lhe o status de uma ciência.

Na *Metafísica* IV (Γ), contudo, Aristóteles parece expressar uma concepção diferente. Inicialmente, ele argumenta que há, em certo sentido, uma ciência que tem o ser como o gênero (seu nome para isso é “filosofia primeira”). Segundo, ele argumenta que os princípios dessa ciência serão, de certo modo, os princípios de todas (embora ele não sustente que os princípios das outras ciências podem ser demonstrados a partir deles). Terceiro, ele identifica um dos seus primeiros princípios como o “mais seguro” de todos os princípios: o princípio da não contradição. Como ele coloca,

É impossível que a mesma coisa pertença e não pertença simultaneamente à mesma coisa, no mesmo sentido.

Esse é o mais seguro de todos os princípios, nos diz Aristóteles, porque “é impossível estar errado sobre ele”. Dado que ele é um primeiro princípio, não pode ser demonstrado; aqueles que pensam o contrário são “não educados na analítica”. Contudo, Aristóteles então fornece o que ele chama de uma “demonstração refutativa” (*apodeixai elenktikôs*) desse princípio.

Uma discussão adicional sobre esse princípio e os argumentos de Aristóteles sobre ele pertencem à um tratamento de sua metafísica (ver metafísica de Aristóteles). Contudo, deve ser notado que: (1) esses argumentos dependem das concepções de Aristóteles sobre lógica em uma extensão maior que qualquer outro tratado fora das próprias obras lógicas; (2) nas obras lógicas, o princípio da não contradição é uma das ilustrações prediletas de Aristóteles dos “princípios comuns” (*koinai archai*) que subjazem a arte da dialética.

Ver metafísica de Aristóteles, Dancy 1975, Code 1986 para maiores discussões.

12. Tempo e Necessidade: A Batalha Naval

A passagem na obra lógica de Aristóteles que talvez tenha recebido a discussão mais intensa nas décadas recentes está em *Da Interpretação* 9, onde Aristóteles discute a questão se toda proposição sobre o futuro tem de ser

verdadeira ou falsa. Embora essa seja uma discussão um pouco secundária nesse contexto, a passagem suscita um problema de maior importância para os quase contemporâneos de Aristóteles (e talvez para os contemporâneos).

Uma **contradição** (*antiphrasis*) é um par de proposições, uma das quais afirma o que a outra nega. Um dos objetivos principais de *Da Interpretação* é discutir a tese de que, de toda contradição, um membro tem de ser verdadeiro e o outro falso. No decorrer dessa discussão, Aristóteles permite algumas exceções. Um caso é o que ele chama de proposições **indefinidas** como “um homem está caminhando”: nada impede tanto essa proposição quanto esta “um homem não está caminhando” sejam simultaneamente verdadeiras. Essa exceção pode ser explicada em termos relativamente simples.

Uma exceção diferente surge por razões mais complexas. Considere estas duas proposições:

1. Haverá uma batalha naval amanhã
2. Não haverá uma batalha naval amanhã

Parece que exatamente uma dessas duas tem de ser verdadeira e a outra falsa. Mas se (1) for verdadeira *agora*, então *tem* de haver uma batalha naval amanhã, e *não pode* deixar de haver uma batalha naval amanhã. O resultado, de acordo com esse problema, é que nada é possível exceto o que realmente acontece: não existem possibilidades não atualizadas.

Tal conclusão, como Aristóteles aponta rapidamente, é um problema tanto para suas próprias concepções metafísicas sobre potencialidades quanto para a noção comum de que algumas coisas dependem de nossa escolha. Por isso ele propõe outra exceção à tese geral sobre pares contraditórios.

Isso seria muito provavelmente aceito pela maioria dos intérpretes. O que a restrição é, contudo, e o que exatamente a motiva é um tema de muita discórdia. Foi proposto, por exemplo, que Aristóteles adotou, ou ao menos flertou com, uma lógica trivalente para proposições sobre o futuro, ou que ele admitiu lacunas de valores de verdade, ou que sua solução incluiu um raciocínio ainda mais abstruso. A literatura é demasiada complexa para ser resumida: ver Anscombe, Hintikka, D. Frede, Whitaker, Waterlow.

Historicamente, ao menos, é provável que Aristóteles esteja respondendo a um argumento originado na Escola Megárica. Aos Megáricos na *Metafísica* IX

(Θ), ele atribui a concepção de que apenas aquilo que acontece é possível. O problema com o qual ele está preocupado lembra bastante o “Argumento do Dominador” de Diodoro Crono, especialmente em alguns detalhes adicionais. Por exemplo, Aristóteles imagina que a frase sobre a batalha naval de amanhã tenha sido proferida há dez mil anos. Caso era verdadeira, então sua verdade era um fato sobre o passado; se o passado agora é imutável, então assim também é o valor de verdade sobre a expressão passada. Isso relembra a premissa do Argumento Dominador de que “o que é passado é necessário”. Diodoro Crono esteve ativo um pouco depois de Aristóteles, e ele era um megárico (ver Dorion 1995 para uma crítica da tentativa de David Sedley de rejeitar isso). Parece-me razoável concluir que o alvo de Aristóteles aqui é algum argumento Megárico, talvez uma versão anterior ao Dominador.

13. Glossário da Terminologia Aristotélica

Aceitar: *tithenai* (em um argumento dialético)

Aceito: *endoxos* (também ‘respeitável’ ‘crença comum’)

Acidente: *sumbebêkos* (ver incidental)

Acidental: *kata sumbebêkos*

Afirmação: *kataphasis*

Afirmativo: *kataphatikos*

Asserção: *apophansis* (frase com valor de verdade, frase declarativa)

Assunção: *hupothesis* Pertence: *huparchein*

Categoria: *katêgoria* (ver discussão na seção 7.3).

Contradizer: *antiphanai*

Contradição: *antiphasis* (no sentido de “par de frases contraditórias” e também no sentido “negação de proposição”)

Contrária: *enantion*

Dedução: *sullogismos*

Definição: *horos, horismos*

Demonstração: *apodeixis*

Negação (de uma proposição): *apophasis*

Dialética: *dialektikê* (a arte da dialética)

Diferença: *diaphora*; diferença específica, *eidopoios diaphora*

Direto: *deiktikos* (de provas; oposto de “através do impossível”)

Essência: *to ti esti, to ti ên einai*

Essencial: *en tõi ti esti* (de predicções)

Extremo: *akron* (do termo maior e menor de uma proposição)

Figura: *schêma*

Forma: *eidos* (também ver espécie)

Gênero: *genos*

Imediato: *amesos* (“sem um meio”)

Impossível: *adunaton*; “através do impossível” (*dia tou adunatou*), de algumas provas.

Incidental: ver Acidental

Indução: *epagôgê*

Médio, termo médio (de uma dedução): *meson*

Negação (de um termo): *apophasis*

Objeção: *enstasis*

Particular: *en merei, epi meros* (de uma proposição); *kath'hekaston* (de indivíduos)

Peculiar, Propriedade Peculiar: *idios, idion*

Possível: *dunaton, endechomenon; endechesthai* (verbo: “ser possível”)

Predicado: *katêgorein* (verbo); *katêgoroumenon* (“o que é predicado”)

Predicação: *katêgoria* (ato ou efeito de predicar, tipo de predicação)

Primário: *prôton*

Princípio: *archê* (ponto de partida de uma demonstração)

Qualidade: *poion*

Reduzir, Redução: *anagein, anagôgê*

Refutar: *elenchein*; refutação, *elenchos*

Ciência: *epistêmê*

Espécie: *eidos*

Específico: *eidopoios* (de uma diferença que “cria a espécie”, *eidopoios diaphora*)

Sujeito: *hupokeimenon*

Substancia: *ousia*

Termo: *horos*

Universal: *katholou* (ambas as proposições de indivíduos)

Referências

- Ackrill, J. L., 1961. *Aristotle's Categories and De Interpretatione*. Clarendon Aristotle Series. Oxford: Clarendon Press, 1961.
- Barnes, Jonathan, 1981. "Proof and the Syllogism". 17–59 in Berti, 1981.
- (trans.), 1975, 1994. *Aristotle, Posterior Analytics* (tradução com comentário). Clarendon Aristotle Series. Oxford: Clarendon Press. 2ª Ed. 1996.
- Becker, Albrecht, 1933. *Die Aristotelische Theorie der Möglichkeitsschlüsse*. Berlin: Junker und Dunnhaupt.
- Berti, Enrico (ed.), 1981. *Aristotle on Science: The Posterior Analytics Padua*: Antenore.
- Bolton, Robert, 1990. "The Epistemological Basis of Aristotelian Dialectic." 185–236 in D. Devereux and P. Pellegrin, eds., *Biologie, logique, et metaphysique chez Aristotle*. Paris: Editions du CNRS, 1990.
- Broadie, Sarah [Waterlow], 1982. *Passage and Possibility*. Oxford: Clarendon Press.
- Brunschwig, Jacques (ed. & trans.), 1967. *Aristotle, Topiques I–IV*. Paris.
- , 2007. *Aristotle, Topiques V–VIII*. Paris.
- , 1984. 31–40 in "Aristotle on Arguments without Winners or Losers". *Wissenschaftskolleg – Jahrbuch 1984/85*. Berlin.
- Burnyeat, Myles, 1981. "Aristotle on Understanding Knowledge". 97–139 in Berti 1981.
- Clark, Michael, 1980. *The Place of Syllogistic in Logical Theory*. Nottingham: Nottingham University Press.
- Code, Alan, 1986. "Aristotle's Investigation of a Basic Logical Principle: Which Science Investigates the Principle of Non-Contradiction?". *Canadian Journal of Philosophy*, 16: 341–358.
- Corcoran, John, 1972. "Completeness of an Ancient Logic". *Journal of Symbolic Logic*, 37: 696–705.
- , 1973. "A Mathematical Model of Aristotle's Syllogistic". *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 55: 191–219.
- Dancy, Russell, 1975. *Sense and Contradiction*. Dordrecht: D. Reidel,
- Dorion, Louis-André (tr. & comm.), 1995. *Les Réfutations sophistiques*. Paris: J. Vrin.

- Ebert, Theodor, 1985. "Gattungen der Prädikate und Gattungen des Seienden bei Aristoteles: Zum Verhältnis von Kat. 4 und Top. I.9". *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 67: 113–138.
- Evans, J. D. G., 1977. *Aristotle's Concept of Dialectic*. Cambridge: Cambridge University Press,
- Ferejohn, Michael, 1980. *The Origins of Aristotelian Science*. New Haven: Yale University Press,
- Frede, Dorothea, 1970. *Aristoteles und die Seeschlacht*. Goettingen.
- Frede, Michael, 1974. "Stoic vs. Peripatetic Syllogistic". *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 56 (1): 1–32.
- , 1981. "Categories in Aristotle.". 29–48 in M. Frede, *Essays in Ancient Philosophy*, Minneapolis: University of Minnesota Press, 1987.
- Hambruch, Ernst, 1904. *Logische Regeln der Platonischen Schule in der Aristotelischen Topik*. Berlin: Weidemann.
- Hamlyn, D. W., 1990. "Aristotle on Dialectic". *Philosophy*, 65: 465–476.
- Hintikka, Jaakko, 1973. *Time and Necessity; Studies in Aristotle's Theory of Modality*. Oxford: Clarendon Press.
- Ierodiakonou, Katerina, 2002. "Aristotle's Use of Examples in the Prior Analytics." *Phronesis*, 47: 127–152.
- Irwin, Terence, 1988. *Aristotle's First Principles*. Oxford: Clarendon Press.
- Johnson, Fred, 1994. "Apodictic Syllogisms: Deductions and Decision Procedures." *History and Philosophy of Logic*, 16: 1–18.
- Le Blond, J. M., 1939. *Logique et méthode chez Aristote*. Paris: J. Vrin.
- Lear, Jonathan, 1980. *Aristotle and Logical Theory*. Cambridge University Press.
- Łukasiewicz, Jan, 1957. *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*. 2^a Ed. Oxford: Clarendon Press.
- , 1910. *O Zasadzie Sprzeczności u Arystotelesa*. Studium Krytyczne [On the Principle of Contradiction in Aristotle. A Critical Study]. Krakow: Polska Akademia Umiejętności. English translation as "On the Principle of Contradiction in Aristotle" (trans. M. Wedin), *Review of Metaphysics*, 24 (1971): 485–509.
- Leszl, Walter, 2004. "Aristotle's Logical Works and His Conception of Logic." *Topoi*, 23: 71–100.
- Malink, Marko, 2008. "Τῶ vs. Τῶν in Prior Analytics 1.1–22". *Classical Quarterly*, 58: 519–536.

- , 2006. “A Reconstruction of Aristotle's Modal Syllogistic.” *History and Philosophy of Logic*, 27 (2): 95–141.
- McCall, Storrs, 1963. *Aristotle's Modal Syllogistic*. Amsterdam: North-Holland.
- McKirahan, Richard, 1992. *Principles and Proofs*. Princeton: Princeton University Press.
- Moraux, Paul, 1968. “*La joute dialectique d'après le huitième livre des Topiques*”. In Owen 1968.
- Nortmann, Ulrich, 1996. *Modale Syllogismen, mögliche Welten, Essentialismus: eine Analyse der aristotelischen Modallogik*. Berlin: De Gruyter.
- , 2002. “*The Logic of Necessity in Aristotle: An Outline of Approaches to the Modal Syllogistic, Together with a General Account of de dicto- and de reNecessity*.” *History and Philosophy of Logic*, 23: 253–265.
- Nussbaum, Martha, 1986. *The Fragility of Goodness*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Owen, G. E. L., 1961. “*Tithenai ta phainomena*.” In S. Mansion, ed., *Aristote et les problèmes de méthode*. Louvain: Presses Universitaires de Louvain.
- (ed.), 1968. *Aristotle on Dialectic: The Topics. Proceedings of the Third Symposium Aristotelicum*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Patterson, Richard, 1995. *Aristotle's Modal Logic: Essence and Entailment in the Organon*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Patzig, Günther, 1969. *Aristotle's Theory of the Syllogism*. Translation, Jonathan Barnes. Dordrecht: D. Reidel.
- Primavesi, Oliver, 1996. *Die aristotelische Topik*. Munich: C. H. Beck.
- Ross, W. D. (ed.), 1951. *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*. Oxford: Clarendon Press.
- Slomkowski, Paul, 1997. *Aristotle's Topics*. Leiden: Brill.
- Smiley, Timothy, 1974. “*What Is a Syllogism?*” *Journal of Philosophical Logic*, 1: 136–154.
- , 1994. “*Aristotle's Completeness Proof*”. *Ancient Philosophy*, 14 (Special Issue): 25–38.
- Smith, Robin (tr. & comm.), 1989. *Aristotle's Prior Analytics*. Indianapolis: Hackett.
- , 1997. *Aristotle, Topics I, VIII, and Selections*. (Clarendon Aristotle Series). Oxford: Clarendon Press.
- Solmsen, Friedrich, 1929. *Die Entwicklung der aristotelischen Logik und Rhetorik*. Berlin: Weidmann.

- Striker, Gisela (tr.), 2009. *Aristotle, Prior Analytics I*. (Clarendon Aristotle Series). Translated with commentary by Gisela Striker. Oxford: Clarendon Press.
- Striker, Gisela, 1985. "Notwendigkeit mit Lücken". *Neue Hefte für Philosophie*, 24/25: 146–164.
- , 1994. "Modal vs. Assertoric Syllogistic." *Ancient Philosophy*, 14 (Special Issue): 39–51.
- Thom, Paul, 1981. *The Syllogism*. Munich: Philosophia Verlag.
- , 1996. *The Logic of Essentialism: An Interpretation of Aristotle's Modal Syllogistic*. Dordrecht: Kluwer.
- Thomason, Steven K., 1993. "Semantic Analysis of the Modal Syllogistic". *Journal of Philosophical Logic*, 22: 111–128.
- van Rijen, Jeroen, 1989. *Aspects of Aristotle's Logic of Modalities*. Dordrecht: Reidel.
- Weidemann, Hermann (tr. & comm.), 1994. *Aristoteles, Peri Hermeneias*. Berlin: Akademie Verlag.
- , 2004. "Aristotle on the Reducibility of All Valid Syllogistic Moods to the Two Universal Moods of the First Figure (Apr A7, 29b1–25)." *History and Philosophy of Logic*, 25: 73–78.
- Whitaker, C. W. A., 1996. *Aristotle's De Interpretatione: Contradiction and Dialectic*. Oxford: Clarendon Press.
- Wedin, Michael V., 1990. "Negation and Quantification in Aristotle." *History and Philosophy of Logic*, 11 (2): 131–150.

(II) Lógica Clássica*

Autor: Stewart Shapiro e Teresa Kouri Kissel

Tradução: Danilo Jose Ribeiro de Oliveira (UNIFAP) e Rodrigo Reis Lastra Cid (UNIFAP)

Revisão: Danilo Fraga Dantas (UFSM)

Tipicamente, uma *lógica* consiste em uma linguagem formal ou informal junto com um sistema dedutivo e uma semântica formal. A linguagem tem componentes que correspondem a uma parte de uma língua natural como o português ou o grego. O sistema dedutivo busca capturar, codificar ou simplesmente registrar *argumentos* que são *válidos* para tal linguagem, e a semântica busca capturar, codificar ou registrar os significados, ou condições de verdade para ao menos parte da linguagem.

A seção a seguir fornece a base de uma lógica típica, às vezes chamada “lógica clássica elementar” ou “lógica clássica de primeira-ordem”. A seção 2 desenvolve uma linguagem formal, com uma sintaxe e gramática rigorosa. Uma linguagem formal é uma sequência ou cadeia de caracteres definida recursivamente a partir de um alfabeto. Como tal, ela não tem significado, ou melhor, o significado de suas fórmulas é dado pelo sistema dedutivo e pela semântica. Alguns dos símbolos possuem contrapartes na linguagem comum. Nós definimos um *argumento* como sendo uma coleção não-vazia de sentenças em

*Tradução do verbete “Classical Logic” de Stewart Shapiro and Kouri Kissel, Teresa publicado pela *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Edição da Primavera de 2018), edição de Edward N. Zalta, publicado com a autorização do editor Prof. Dr. Edward Zalta. URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/logic-classical/>>.

The following is the translation of the entry on Classical Logic by Stewart Shapiro and Teresa Kouri Kissel, in the Stanford Encyclopedia of Philosophy. The translation follows the version of the entry in the SEP’s archives. This translated version may differ from the current version of the entry, which may have been updated since the time of this translation. The current version is located at <https://plato.stanford.edu/entries/logic-classical/>. We’d like to thank the Editors of the Stanford Encyclopedia of Philosophy, mainly Prof. Dr. Edward Zalta, for granting permission to translate and to publish this entry. <https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/logic-classical/>

linguagem formal, uma das quais é designada para ser a conclusão. As outras sentenças (se houver) em um argumento são suas premissas. A seção 3 busca configurar um sistema dedutivo para a linguagem, no espírito da dedução natural. Um argumento é *derivável* se houver uma dedução de algumas ou de todas as suas premissas para sua conclusão. A Seção 4 oferece uma semântica de modelos. Um argumento é *válido* se não houver interpretação (na semântica) em que suas premissas são todas verdadeiras e sua conclusão falsa. Isso reflete a visão de longa data de que um argumento válido preserva a verdade.

Na seção 5, vamos ver a relação entre o sistema dedutivo e a semântica, e em particular, a relação entre a derivação e a validade. Nós mostraremos que um argumento é derivável apenas se este é válido. Esta agradável característica, chamada *correção*, implica que nenhuma dedução leva de premissas verdadeiras para uma conclusão falsa. Portanto, a dedução preserva a verdade. Então, nós estabelecemos a tese a conversa, chamada de *completude*, de que um argumento é válido apenas se este for derivável. Isto estabelece que o sistema dedutivo é rico o suficiente para fornecer uma dedução para todo argumento válido. Assim, há deduções o suficiente: todos e somente os argumentos válidos são deriváveis. Nós brevemente indicamos outras características da lógica, algumas (características) das quais são corolários da correção e da completude.

A seção final, seção 6, é dedicada a um exame breve da posição filosófica de que a lógica clássica é "a única lógica certa".

1. Introdução

Atualmente, a lógica é um ramo da matemática e um ramo da filosofia. Na maioria das grandes universidades, ambos os departamentos oferecem cursos de lógica, e geralmente há muita sobreposição entre eles. Linguagem formal, sistemas dedutivos, e semântica formal são objetos matemáticos e, como tal, o lógico está interessado em suas propriedades e relações matemáticas. Correção, completude, e a maioria dos outros resultados relatados abaixo são exemplos típicos. Filosoficamente, a lógica é no mínimo fortemente relacionada ao estudo do *raciocínio correto*. O raciocínio é uma atividade epistêmica, mental. Desta forma, a lógica é, no mínimo, aliada com a epistemologia. A Lógica, além disso, é

um ramo central da ciência da computação, devido, às relações computacionais interessantes em sistemas lógicos, e, em parte, à estreita conexão entre argumentação dedutiva formal e raciocínio (veja os verbetes sobre funções recursivas, computabilidade e complexidade, e filosofia da ciência da computação).

Isso levanta questões referentes à relevância filosófica dos vários aspectos matemáticos da lógica. Como dedutibilidade e validade, como propriedades de linguagens formais – conjuntos de sequências de caracteres sobre um alfabeto fixo – se relacionam com um raciocínio correto? O que os resultados matemáticos relatados abaixo possuem em comum com as questões filosóficas relativas ao raciocínio válido? Esta é uma instancia do problema filosófico de explicar como a matemática se aplica à realidade não-matemática.

Tipicamente, um raciocínio dedutivo comum tem um lugar numa linguagem natural, ou possivelmente numa mesma linguagem natural expandida com alguns símbolos matemáticos. Desta forma, nossa questão começa com a relação entre uma linguagem natural e uma linguagem formal. Sem tentar ser exaustivo, pode ajudar esboçar várias opções sobre este assunto.

Um ponto de vista é a de que as linguagens formais exibem acuradamente características de certos fragmentos de uma linguagem natural. Alguns filósofos afirmam que sentenças declarativas da linguagem natural possuem *formas lógicas* subjacentes e que essas formas são expressas por fórmulas de uma linguagem formal. Outros escritores sustentam que sentenças declarativas (bem-sucedidas) expressam *proposições*; e que as fórmulas de linguagens formais, de alguma forma, exibem as formas dessas proposições. Em uma visão como essa, os componentes de uma lógica oferecem as estruturas profundas subjacentes do raciocínio correto. Um “pedaço” de ‘um raciocínio’ em linguagem natural é correto se a formas subjacentes às sentenças constituem um argumento válido ou dedutível. Veja, por exemplo, Montague [1974], Davidson [1984], Lycan [1984] (e o verbete sobre forma lógica).

Outro ponto de vista, mantido, ao menos em parte, por Gottlob Frege e Wilhelm Leibniz, é o de que porque as línguas naturais são carregadas de imprecisão e ambiguidade, estas deveriam ser *substituídas* pelas linguagens formais. Uma visão semelhante, sustentada por W. V. O. Quine (ex, [1960], [1986]), é que uma linguagem natural deveria ser *arregimentada*, limpa, para um trabalho científico e metafísico sério. Um desiderato desse empreendimento é que

as estruturas lógicas na linguagem arregimentada devem ser transparentes. Deve ser fácil “apreender” as propriedades lógicas de cada sentença. Uma linguagem arregimentada é semelhante a uma linguagem formal em relação, por exemplo, ao rigor explicitamente apresentado em sua sintaxe e suas condições de verdade.

Em uma visão como esta, a dedução e a validade representam *idealizações* do raciocínio correto na linguagem natural. Um raciocínio é correto na medida em que corresponde ou pode ser arregimentado por um argumento válido ou dedutivo em uma linguagem formal.

Quando matemáticos e outros filósofos se engajam no raciocínio dedutivo, eles ocasionalmente invocam fórmulas em uma linguagem formal para ajudar a desambiguar ou, de outra forma, clarificar o que eles querem dizer. Em outras palavras, algumas vezes, fórmulas em uma linguagem formal *são usadas* no raciocínio comum. Isto sugere que alguém poderia pensar uma linguagem formal como um *adendo* à linguagem natural. Então nossa presente questão passa a ser relativa à relação entre este adendo e a linguagem original. O que a dedutibilidade e a validade, conforme bem definidas no adendo, nos dizem sobre o raciocínio dedutivo correto em geral?

Outro ponto de vista é que uma linguagem formal é um *modelo matemático* de uma linguagem natural, mais ou menos no mesmo sentido que, digamos, uma coleção de massas pontuais é um modelo de um sistema de objetos físicos, e que a construção de Bohr é um modelo de um átomo. Em outras palavras, uma linguagem formal apresenta certas características de uma linguagem natural, ou idealizações dela, ignorando ou simplificando outras características. O objetivo dos modelos matemáticos é lançar luz sobre o que eles modelam, sem afirmar que o modelo é acurado em todos os aspectos ou que deva substituir aquilo que é modelado. Em uma visão como essa, a dedutibilidade e a validade representam modelos matemáticos de (talvez diferentes aspectos do) raciocínio correto em linguagens naturais. Raciocínios dedutivos correspondem, aproximadamente, a argumentos válidos ou dedutíveis; Raciocínios incorretos correspondem, aproximadamente, a argumentos inválidos ou não dedutíveis. Veja por exemplo, Corcoran [1973], Shapiro [1998] e Cook [2002].

Não há necessidade de julgar este assunto aqui. Talvez a verdade esteja em uma combinação das opções acima, ou talvez alguma outra opção seja a correta, ou mais esclarecedora. Nós levantamos a questão apenas para emprestar alguma perspectiva filosófica para o tratamento formal que se segue.

2. Linguagem

Aqui nós desenvolvemos o básico de uma linguagem formal, ou para ser preciso, de uma classe de linguagens formais. Como dito, uma linguagem formal é definida como um conjunto recursivamente definido de sequências de caracteres a partir de um alfabeto fixo. Alguns aspectos das línguas formais correspondem a, ou têm contrapartes em línguas naturais, como o português. Tecnicamente, essa “relação de contraparte” não faz parte do desenvolvimento formal, mas a mencionaremos em certos momentos, para motivar algumas das características e dos resultados.

2.1. Blocos Constitutivos

Começamos com análogos dos *termos singulares*, itens linguísticos cuja função é denotar uma pessoa ou objeto. Nós os chamamos *termos*. Assumimos um estoque de *constantes individuais*. Estas estão em letras minúsculas, perto do começo do alfabeto, com ou sem subscritos numéricos: a , a_1 , b_{23} , c , d_{22} , etc.

Nós consideramos um número potencialmente infinito de constantes individuais. Dentro do sistema presente, cada constante é um único caractere, e desta forma, as constantes individuais não possuem sintaxe interna. Assim, temos um alfabeto infinito. Isto poderia ser evitado tomando uma constante, como d_{22} , por exemplo, como consistindo de três caracteres, um “ d ” seguido por um par de “2” subscrito.

Também assumimos um estoque de *variáveis individuais*. Estas são representadas pelas letras minúsculas, próximas ao final do alfabeto, com ou sem subscritos numéricos:

w , x , y_{12} , z , z_4 , etc.

Em raciocínio matemático comum, há duas funções que termos precisam ser cumprir. Precisamos ser capazes de denotar objetos específicos, porém não especificados (ou arbitrários) e, às vezes, precisamos expressar a generalidade. Em nosso sistema, usamos constantes para o papel de referência não especificada e variáveis para expressar generalidade. Ambos os usos são recapitulados no tratamento formal abaixo. Alguns lógicos empregam símbolos

diferentes para objetos não especificados (às vezes, chamada, “parâmetros individuais”) e usam variáveis para expressar generalidade.

Constantes e variáveis são os únicos termos em nossa linguagem formal, portanto todos os nossos termos são simples, correspondendo a nomes próprios e a alguns usos de pronomes. Nós chamamos um termo de fechado se ele não contém variáveis. Em geral, nós usamos v para representar variáveis e t para representar um termo fechado. Alguns autores também introduzem *letras funcionais*, que permitem termos complexos que correspondem a: “7+4” e “a esposa de Bill Clinton”, ou a termos complexos contendo variáveis, como “o pai de x ” e “ x/y ”. Os livros de lógica voltados para matemáticos provavelmente contêm letras funcionais devido a centralidade das funções em um discurso matemático. Livros destinados a um público mais geral (ou a estudantes de filosofia) podem deixar de lado as letras funcionais, pois simplificam a sintaxe e a teoria. Nós seguimos a última rota aqui. Este é um exemplo de escolha de apresentar um sistema com recursos expressivos maiores, ao custo de tornar seu tratamento formal mais complexo.

Para cada número natural n , introduzimos um estoque de *letras predicativas* de n -posições. São letras maiúsculas do começo ou do meio do alfabeto. Um sobrescrito indica o número de posições, e pode ou não pode haver um índice subscrito. Por exemplo,

A^3 , B^3_2 , P^3 , etc.

são letras predicativas de três posições. Nós frequentemente omitimos o sobrescrito, quando nenhuma confusão resulta. Também adicionamos um símbolo de predicado especial de duas posições “=” para a identidade.

Às vezes, as letras predicativas de zero posições são chamadas de “letras sentenciais”. Elas correspondem a sentenças independentes das quais a estrutura interna não importa. Letras predicativas de uma posição, chamadas “letras predicativas monádicas”, correspondem a itens linguísticos que denotam propriedades, como “ser um homem”, “ser vermelho” ou “ser um número primo”. As letras predicativas de duas posições, chamadas de “letras predicativas binárias”, correspondem a itens linguísticos que denotam relações binárias, como “ser um pai de” ou “ser maior que”. As letras predicativas de três posições correspondem a relações de três posições, como “ficar em linha reta entre”. E assim por diante.

A *terminologia não lógica* da linguagem consiste em suas constantes

individuais e letras predicativas. O símbolo "=", para identidade, não é um símbolo não lógico. Ao considerar a identidade como lógica, nós fornecemos um tratamento explícito para ela no sistema dedutivo e na semântica formal. A maioria dos autores faz o mesmo, mas há alguma controvérsia sobre o assunto (Quine [1986, capítulo 5]). Se K é um conjunto de constantes e letras predicativas, então damos os fundamentos de uma linguagem $L1K=$ construída sobre este conjunto de terminologia não lógica. Pode ser chamada de *linguagem de primeira ordem com identidade* em K . Uma linguagem similar que não possui o símbolo para identidade (ou que toma a identidade como não lógica) pode ser chamada de $L1K$, a *linguagem de primeira ordem sem identidade* em K .

2.2. Fórmulas Atômicas

Se V é uma letra predicativa de n -posições em K , e t_1, \dots, t_n são termos de K , então $Vt_1 \dots t_n$ é uma *fórmula atômica* de $L1K=$. Observe que os termos t_1, \dots, t_n não precisam ser distintos. Exemplos de fórmulas atômicas incluem:

$$P^4 xaab, C^1x, C^1a, D^0, A^3abc.$$

O último é um análogo de uma declaração de que uma certa relação (A) se mantém entre três objetos (a, b, c). Se t_1 e t_2 são termos, então $t_1 = t_2$ é também uma fórmula atômica de $L1K=$. Ela corresponde a uma afirmação de que t_1 é idêntico a t_2 .

Se uma fórmula atômica não possui variáveis, então esta é chamada de *sentença atômica*. Se tiver variáveis, ela é chamada *aberta*. Na lista de exemplos acima, a primeira e a segunda estão abertas; as demais são sentenças.

2.3. Fórmulas Compostas

Agora apresentamos os itens finais do léxico:

$\neg, \&, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, (,)$

Damos uma definição recursiva de uma *fórmula* de $L1K=$:

1. Todas fórmulas atômicas de $L1K=$ são fórmulas de $L1K=$.

2. Se θ é uma fórmula de $L1K=$, então $\neg\theta$ também o é.

Uma fórmula correspondente a $\neg\theta$ diz que não é o caso que θ . O símbolo " \neg " é chamado "negação", e é um conectivo unário.

3. Se θ e ψ são fórmulas de $L1K=$, então também o é $(\theta \& \psi)$.

O símbolo "&" corresponde ao português "e" (quando "e" é usado para conectar as sentenças). Então $(\theta \& \psi)$ pode ser lido como " θ e ψ ". A fórmula $(\theta \& \psi)$ é chamada de "conjunção" de θ e ψ .

4. Se θ e ψ são fórmulas de $L1K=$, então $(\theta \vee \psi)$ também é.

A cunha " \vee " corresponde a "ou ... ou um... ou ambos", então $(\theta \vee \psi)$ pode ser lido " θ ou ψ ". A fórmula $(\theta \vee \psi)$ é chamada de "disjunção" de θ e ψ .

5. Se θ e ψ são fórmulas de $L1K=$, então também o é $(\theta \rightarrow \psi)$.

A seta " \rightarrow " corresponde aproximadamente a "se ... então ...", então $(\theta \rightarrow \psi)$ pode ser lido como "se θ , então ψ ", ou " θ somente se ψ ".

Os símbolos "&", " \vee " e " \rightarrow " são chamados de "conectivos binários", já que eles servem para "conectar" duas fórmulas em uma. Alguns autores introduzem $(\theta \leftrightarrow \psi)$ como uma abreviação de $((\theta \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \theta))$. O símbolo " \leftrightarrow " é um análogo da locução "se e somente se".

6. Se θ é uma fórmula de $L1K=$ e v é uma variável, então $\forall v\theta$ é uma fórmula de $L1K=$.

O símbolo " \forall " é chamado de *quantificador universal* e é um análogo de "para todos"; então $\forall v\theta$ pode ser lido como "para todos os v , θ ".

7. Se θ é uma fórmula de $L1K=$ e v é uma variável, então $\exists v\theta$ é uma fórmula de $L1K=$.

O símbolo " \exists " é chamado de *quantificador existencial*, e é um análogo de "existe" ou "há", então $\exists v\theta$ pode ser lido como "existe um v , tal que θ ".

8. Isso é tudo, pessoal. Ou seja, todas as fórmulas são construídas de acordo com as regras (1)-(7).

A cláusula (8) nos permite fazer induções sobre a complexidade das fórmulas. Se uma certa propriedade se mantém nas fórmulas atômicas e é fechada sob as operações apresentadas nas cláusulas (2) – (7), então a propriedade se mantém para todas as fórmulas. Aqui está um exemplo simples:

Teorema 1. Cada fórmula de $L1K=$ tem o mesmo número de parênteses esquerdo e direito. Além disso, cada parêntese à esquerda corresponde a um

parêntese à direita único, que ocorre à direita do parêntese à esquerda. Da mesma forma que cada parêntese direito corresponde a um parêntese esquerdo único, que ocorre à esquerda do dado parêntese direito. Se um parêntese ocorrer entre um par combinado de parênteses, então o posicionamento do seu par também ocorrerá dentro desse par correspondente. Em outras palavras, parênteses que ocorrem dentro de um par combinado são eles mesmos combinados.

Prova: pela cláusula (8), toda fórmula é construída a partir de fórmulas atômicas usando as cláusulas (2)-(7). As fórmulas atômicas não possuem parênteses. Os parênteses são introduzidos apenas nas cláusulas (3)-(5) e, a cada vez, são introduzidos como um conjunto combinado. Então, em qualquer estágio da construção de uma fórmula, os parênteses são pareados.

Em seguida, definimos a noção de uma variável ocorrer *livre ou vinculada* em uma fórmula. Uma variável que segue imediatamente um quantificador (como em " $\forall x$ " e " $\exists y$ ") não é livre nem vinculada. Nós não pensamos nisso como ocorrências da variável. Todas as variáveis que ocorrem numa fórmula atômica são livres. Se uma variável ocorre livre (ou ligada) em θ ou em ψ , então essa mesma ocorrência é livre (ou ligada) em $\neg\theta$, $(\theta \ \& \ \psi)$, $(\theta \ \vee \ \psi)$ e $(\theta \rightarrow \psi)$. Ou seja, os conectivos (unários e binários) não alteram o status das variáveis que ocorrem neles. Todas as ocorrências da variável v em θ estão ligadas em $\forall v\theta$ e $\exists v\theta$. Qualquer ocorrência livre de v em θ está ligada pelo quantificador inicial. Todas as outras variáveis que ocorrem em θ são livres ou ligadas em $\forall v\theta$ e $\exists v\theta$, como em θ .

Por exemplo, na fórmula $(\forall x(Axy \vee Bx) \ \& \ Bx)$, as ocorrências de " x " em Axy e no primeiro Bx são ligadas pelo quantificador. A ocorrência de " y " e a última ocorrência de " x " são livres. Em $\forall x(Ax \rightarrow \exists xBx)$, o " x " em Ax é ligado pelo quantificador universal inicial, enquanto a outra ocorrência de x é ligada pelo quantificador existencial. A sintaxe acima permite essa "ligação-dupla". Embora não criem quaisquer ambiguidades (ver abaixo), nós vamos evitar tais fórmulas, por uma questão de gosto e clareza.

A sintaxe também permite a chamada vinculação vácuca, como em $\forall xBc$. Estes também serão evitados no que se segue. Alguns tratamentos da lógica excluem a ligação vácuca e a dupla ligação como uma questão de sintaxe. Isso simplifica alguns dos tratamentos abaixo, e complica outros.

Variáveis livres correspondem à guardadores de posição [*placeholders*], enquanto variáveis ligadas são usadas para expressar generalidade.

Se uma fórmula não tiver variáveis, ela será chamada de *sentença*. Se uma fórmula contiver variáveis livres, ela será chamada de *aberta*.

2.4. Características da Sintaxe

Antes de voltarmos para o sistema dedutivo e para a semântica, mencionamos algumas características da linguagem, conforme desenvolvidas até agora. Isso ajuda a apresentar o contraste entre linguagens formais e linguagens naturais, como o português.

Nós assumimos desde o início que todas as categorias são disjuntas. Por exemplo, nenhum conectivo é também um quantificador ou uma variável, e os termos não lógicos também não são parênteses ou conectivos. Também, os itens dentro de cada categoria são distintos. Por exemplo, o sinal para a disjunção não faz dupla função, tal como o símbolo da negação e, talvez mais significativamente, nenhum predicado de duas posições é também um predicado de uma posição.

Uma diferença entre linguagens naturais como o português e as linguagens formais, como $L1K$ é que as últimas não devem ter ambiguidades. A política de que as diferentes categorias de símbolos não se sobrepõem, e que nenhum símbolo realiza dupla função, evita o tipo de ambiguidade, às vezes chamado de “equivoco”, que ocorre quando uma única palavra tem dois significados: “encontre você no banco”. Mas há outros tipos de ambiguidade. Considere a frase em português:

John é casado e Mary é solteira ou Joe é louco.

Isso pode significar que John é casado e ou Mary é solteira ou Joe é louco, ou então pode significar que tanto John é casado quanto Mary é solteira ou então Joe é louco. Uma ambiguidade como esta, devido a diferentes maneiras de analisar a mesma sentença, é chamada por vezes de “anfibologia”. Se nossa linguagem formal não tivesse parênteses, ela conteria anfibologia. Por exemplo, haveria uma “fórmula” $A \& B \vee C$. Essa fórmula seria $((A \& B) \vee C)$ ou $(A \& (B \vee C))$? Os parênteses resolvem o que seria uma anfibologia.

Podemos ter certeza de que não existem outras anfibologias em nossa linguagem? Ou seja, podemos ter certeza de que cada fórmula de $L1K$

pode ser expressa de apenas uma maneira? Nossa próxima tarefa é responder a essa pergunta.

Vamos usar temporariamente o termo “marcador unário” para o símbolo de negação (\neg) ou um quantificador seguido por uma variável (por exemplo $\forall x, \exists z$).

Lema 2. Cada fórmula consiste em uma cadeia de caracteres de zero ou mais marcadores unários seguidos por uma fórmula atômica ou uma fórmula produzida usando um conectivo binário, através de uma das cláusulas (3)-(5).

Prova: Nós procederemos por indução sobre a complexidade da fórmula ou, em outras palavras, sobre o número de regras de formação que são aplicadas. O Lema claramente se aplica a fórmulas atômicas. Seja n um número natural, e suponha que o Lema seja válido para qualquer fórmula construída a partir de n ou menos instâncias das cláusulas (2) – (7). Tomemos θ como uma fórmula construída para $n + 1$ instâncias. O Lema se sustenta se a última cláusula usada para construir θ for (3), (4), ou (5). Se a última cláusula usada para construir θ foi (2), então θ é $\neg\psi$. Como ψ foi construído com n instâncias da regra, o Lema se mantém para ψ (pela hipótese de indução) e, assim, vale para θ . Um raciocínio semelhante mostra que o Lema é válido para θ , se a última cláusula usada foi (6) ou (7). Pela cláusula (8), isso exaure todos os casos e, portanto, o Lema vale para θ por indução.

Lema 3. Se uma fórmula θ contiver um parêntese à esquerda, então ela também tem um parêntese à direita, que pareia com o parêntese mais à esquerda em θ .

Prova: Aqui também procedemos por indução no número de instâncias de (2) – (7) usadas para construir a fórmula. Claramente, o Lema vale para fórmulas atômicas, já que elas não têm parênteses. Suponha, então, que o Lema se aplica a fórmulas construídas com n ou menos instâncias de (2) – (7) e que seja θ construída com $n + 1$ instâncias. Se a última cláusula aplicada foi (3) – (5), então o Lema se mantém, dado que θ começa com um parêntese esquerdo e termina com o parêntese direito correspondente. Se a última cláusula aplicada foi (2), então θ é $\neg\psi$, e a hipótese de indução se aplica a ψ . Similarmente, se a última cláusula aplicada foi (6) ou (7), então θ consiste em um quantificador, uma variável, e uma fórmula aos quais podemos aplicar a hipótese de indução. Segue-se que o Lema vale para θ .

Lema 4. Cada fórmula contém pelo menos uma fórmula atômica.

A prova procede por indução no número de instâncias de (2) – (7) usadas para construir a fórmula, e nós deixamo-la a como um exercício.

Teorema 5. Sejam α , β sequências não vazias de caracteres em nosso alfabeto, de modo que $\alpha\beta$ (isto é, α seguida por β) seja uma fórmula. Então α não é uma fórmula.

Prova: Pelo Teorema 1 e Lema 3, se α contém um parêntese à esquerda, então o parêntese à direita que corresponde ao parêntese à esquerda em $\alpha\beta$ vem no final de $\alpha\beta$, e assim o parêntese à direita correspondente está em β . Então, α tem mais parênteses à esquerda do que parênteses à direita. Pelo Teorema 1, α não é uma fórmula. Então agora suponha que α não contém nenhum parêntese à esquerda. No Lema 2, $\alpha\beta$ consiste de uma cadeia de zero ou mais marcadores unários seguidos por uma fórmula atômica ou uma fórmula produzida usando um conectivo binário, via uma das cláusulas (3) – (5). Se a última fórmula foi produzida através de uma das cláusulas (3) – (5), então ela começa com um parêntese à esquerda. Como α não contém parênteses, deve ser uma cadeia de marcadores unários. Mas então α não contém nenhuma fórmula atômica, e então pelo Lema 4, α não é uma fórmula. O único caso restante é onde $\alpha\beta$ consiste em uma cadeia de marcadores unários seguidos por uma fórmula atômica, seja na forma $t_1 = t_2$ ou $Pt_1 \dots t_n$. Novamente, se α consistisse apenas de marcadores unários, não seria uma fórmula, e assim α deve consistir dos marcadores unários que iniciam $\alpha\beta$, seguidos ou por $t_1, t_1 =$, ou pela letra predicativa P , e talvez, alguns (mas não todos) termos t_1, \dots, t_n . Nos dois primeiros casos, α não possui uma fórmula atômica, pela política de que as categorias não se sobrepõem. Como P é uma letra predicativa de n -posições, pela política de que as letras predicativas são distintas, P não é uma letra predicativa de m -posições para qualquer $m \neq n$. Portanto, a parte de α que consiste em P seguida pelos termos não é uma fórmula atômica. Em todos esses casos, então, α não contém uma fórmula atômica. Pelo Lema 4, α não é uma fórmula.

Estamos finalmente em posição de mostrar que não há anfibiologias em nossa linguagem.

Teorema 6. Seja θ qualquer fórmula de $L1K=$. Se θ não é atômica, então há um e apenas um entre (2) – (6) que foi a última cláusula aplicada para

construir θ . Ou seja, θ não poderia ser produzida por duas cláusulas diferentes. Além disso, nenhuma fórmula produzida pelas cláusulas (2) – (7) é atômica.

Prova: Pela Cláusula (8), ou θ é atômica ou foi produzida por uma das cláusulas (2) – (7). Assim, o primeiro símbolo em θ deve ser uma letra predicativa, um termo, um marcador unário, ou um parêntese à esquerda. Se o primeiro símbolo em θ é uma letra ou termo de predicado, então θ é atômica. Nesse caso, θ não foi produzida por nenhuma das cláusulas (2) – (7), pois todas essas fórmulas começam com algo diferente de uma letra ou termo de predicado. Se o primeiro símbolo em θ é um sinal de negação “ \neg ”, então θ foi produzida pela cláusula (2), e não por qualquer outra cláusula (dado que as outras cláusulas produzem fórmulas que começam com um quantificador ou um parêntese esquerdo). Similarmente, se θ começa com um quantificador universal, então ela foi produzida pela cláusula (6), e não por qualquer outra cláusula, e se θ começa com um quantificador existencial, então foi produzida pela cláusula (7), e não por qualquer outra cláusula. O único caso que resta é aquele em que θ começa com um parêntese à esquerda. Neste caso, esta deve ter sido produzida por uma das cláusulas de (3) – (5), e não por qualquer outra. Nós só precisamos descartar a possibilidade de que θ tenha sido produzido por mais de uma dentre (3) – (5), e não por qualquer outra cláusula. Para usarmos um exemplo, suponha que θ foi produzida por (3) – (4). Então θ é $(\psi_1 \ \& \ \psi_2)$ e θ também é $(\psi_3 \ \vee \ \psi_4)$, em que ψ_1, ψ_2, ψ_3 , e ψ_4 são elas mesmas fórmulas. Ou seja, $(\psi_1 \ \& \ \psi_2)$ é a mesma fórmula que $(\psi_3 \ \vee \ \psi_4)$. Pelo Teorema 5, ψ_1 não pode ser uma parte própria de ψ_3 , nem ψ_3 pode ser uma parte própria de ψ_1 . Então, ψ_1 deve ser a mesma fórmula que ψ_3 . Mas então “ $\&$ ” deve ser o mesmo símbolo que “ \vee ”, e isso contradiz a política de que todos os símbolos são diferentes. Então, θ não foi produzido pelas cláusulas (3) e (4). Raciocínio semelhante dá conta das outras combinações.

Este resultado é às vezes chamado de “legibilidade única”. Isso mostra que cada fórmula é produzida a partir das fórmulas atômicas, através das várias cláusulas, de exatamente uma maneira. Se θ foi produzida pela cláusula (2), então seu *conectivo principal* é o “ \neg ” inicial. Se θ foi produzida pelas cláusulas (3), (4) ou (5), então seu *conectivo principal* é o “ $\&$ ”, “ \vee ” ou “ \rightarrow ”, introduzido respectivamente. Se θ foi produzida pelas cláusulas (6) ou (7), então seu *conectivo principal* é o quantificador inicial. Pedimos desculpas

pelos detalhes tediosos. Nós os incluímos para indicar o nível de precisão e rigor da sintaxe.

3. Dedução

Nós introduzimos agora um *sistema dedutivo*, D , para nossas linguagens. Como acima, definimos um argumento como uma coleção não vazia de sentenças em uma linguagem formal, dentre as quais uma é designada como a *conclusão*. Se existem outras frases no argumento, elas são suas premissas. Por convenção, usamos “ Γ ”, “ Γ ’”, “ Γ_1 ”, etc, para versar sobre os conjuntos de fórmulas, e usamos as letras “ ϕ ”, “ ψ ”, “ θ ”, maiúsculas ou minúsculas, com ou sem subscritos, para variar sobre fórmulas singulares. Escrevemos “ Γ, Γ' ” para a união entre Γ e Γ' , e “ Γ, ϕ ” para a união entre Γ e $\{\phi\}$.

Escrevemos um argumento na forma $\langle \Gamma, \phi \rangle$, onde Γ é um conjunto de sentenças, as premissas, e ϕ é uma única sentença, a conclusão. Lembre-se que Γ pode ser vazio. Escrevemos $\Gamma \vdash \phi$ para indicar que ϕ é dedutível de Γ , ou, em outras palavras, que o argumento $\langle \Gamma, \phi \rangle$ é dedutível em D . Podemos escrever $\Gamma \vdash_D \phi$ para enfatizar o sistema dedutivo D . Escrevemos $\vdash \phi$ ou $\vdash_D \phi$ para indicar que ϕ pode ser deduzido (em D) do conjunto vazio de premissas.

As regras em D são escolhidas para combinar relações lógicas relativas aos análogos portugueses da terminologia lógica na linguagem. Novamente, definimos a relação de dedutibilidade por recursão. Começamos com a regra de premissas:

(Pre) Se ϕ é um membro de Γ , então $\Gamma \vdash \phi$.

Portanto, temos assim que $\{\phi\} \vdash \phi$; cada premissa se segue de si mesma. Em seguida, apresentamos duas cláusulas para cada conectivo e quantificador. As cláusulas indicam como introduzir e eliminar frases nas quais cada símbolo é o principal conectivo.

Primeiro, lembre-se que “ $\&$ ” é um análogo do conectivo português “e”. Intuitivamente, pode-se deduzir uma sentença da forma $(\theta \& \psi)$ se θ já foi deduzido e se ψ já foi deduzido. Conversamente, pode-se deduzir θ de $(\theta \& \psi)$ e pode-se deduzir ψ de $(\theta \& \psi)$:

(&I) Se $\Gamma_1 \vdash \theta$ e $\Gamma_2 \vdash \psi$, então $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (\theta \& \psi)$.

(&E) Se $\Gamma \vdash (\theta \& \psi)$, então $\Gamma \vdash \theta$; e se $\Gamma \vdash (\theta \& \psi)$ então $\Gamma \vdash \psi$.

O nome “&” significa “&-introdução”; “&E” significa “&-eliminação”.

Como o símbolo “V” corresponde ao português “ou”, $(\theta \vee \psi)$ deve ser dedutível de θ e $(\theta \vee \psi)$ também deve ser dedutível de ψ ($\theta \vee \psi$):

(\vee I) Se $\Gamma \vdash \theta$, então $\Gamma \vdash (\theta \vee \psi)$; se $\Gamma \vdash \psi$ então $\Gamma \vdash (\theta \vee \psi)$.

A regra de eliminação é um pouco mais complicada. Suponha que é verdade que “ θ ou ψ ”. Suponha também que ϕ segue de θ e que ϕ segue de ψ . Pode-se raciocinar que se θ é verdadeiro, então ϕ é verdadeiro. Se, em vez disso, ψ for verdadeiro, ainda temos que ϕ é verdadeiro. Então, de qualquer forma, ϕ deve ser verdadeiro.

(\vee E) Se $\Gamma_1 \vdash (\theta \vee \psi)$, $\Gamma_2, \theta \vdash \phi$ e $\Gamma_3, \psi \vdash \phi$, então $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \phi$.

Para as próximas cláusulas, lembre-se de que o símbolo, “ \rightarrow ”, é um análogo da construção “se... então...” em português. Se alguém sabe, ou assume $(\theta \rightarrow \psi)$ e também sabe, ou assume θ , então pode-se concluir ψ . Conversamente, se deduzirmos ψ de uma suposição θ , então podemos concluir que $(\theta \rightarrow \psi)$.

(\rightarrow I) Se $\Gamma, \theta \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash (\theta \rightarrow \psi)$.

(\rightarrow E) Se $\Gamma_1 \vdash (\theta \rightarrow \psi)$ e $\Gamma_2 \vdash \theta$, então $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi$.

Esta regra de eliminação é as vezes chamada de “modus ponens”. Em alguns textos lógicos, a regra é provada como um “teorema de dedução”.

Nossas próximas cláusulas são para o sinal de negação “ \neg ”. A ideia subjacente é que uma sentença ψ é inconsistente com a negação $\neg\psi$. Ambas não podem ser verdadeiras. Chamamos um par de sentenças $\psi, \neg\psi$ *contraditórias*. Se podemos deduzir tal par de uma suposição θ , então podemos concluir que θ é falso, ou, em outras palavras, podemos concluir que $\neg\theta$.

(\neg I) Se $\Gamma_1, \theta \vdash \psi$ e $\Gamma_2, \theta \vdash \neg\psi$, então $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \neg\theta$.

Por (Pre), temos que $\{A, \neg A\} \vdash A$ e $\{A, \neg A\} \vdash \neg A$. Então, por \neg I eu tenho que $\{A\} \vdash \neg\neg A$. No entanto, ainda não temos a conversa. Intuitivamente, $\neg\neg\theta$ corresponde a “não é o caso que não é o caso que”. Alguém poderia pensar que este último é equivalente a θ , e nós temos uma regra para esse efeito:

(EDN) Se $\Gamma \vdash \neg\neg\theta$, então $\Gamma \vdash \theta$.

O nome EDN significa “eliminação de dupla negação”. Há alguma controvérsia sobre esta inferência. Ela é rejeitada por filósofos e matemáticos

que não sustentam que toda sentença significativa seja ou verdadeira ou não verdadeira. A *lógica intuicionista* não sanciona a inferência em questão (ver, por exemplo Dummett [2000], ou o verbete sobre a lógica intuicionista, ou a sobre a história da lógica intuicionista), mas, novamente, a lógica clássica sanciona.

Para ilustrar as partes do sistema dedutivo D apresentadas até agora, mostramos que $\vdash (A \vee \neg A)$:

- i. $\{\neg(A \vee \neg A), A\} \vdash \neg(A \vee \neg A)$, por (Pre).
- ii. $\{\neg(A \vee \neg A), A\} \vdash A$, por (Pre).
- iii. $\{\neg(A \vee \neg A), A\} \vdash (A \vee \neg A)$, por ($\vee I$), de (ii).
- iv. $\{\neg(A \vee \neg A)\} \vdash \neg A$, por ($\neg I$), de (i) e (iii).
- v. $\{\neg(A \vee \neg A), \neg A\} \vdash \neg(A \vee \neg A)$, por (Pre).
- vi. $\{\neg(A \vee \neg A), \neg A\} \vdash \neg A$, por (Pre).
- vii. $\{\neg(A \vee \neg A), \neg A\} \vdash (A \vee \neg A)$, por ($\vee I$), de (vi).
- viii. $\{\neg(A \vee \neg A)\} \vdash \neg\neg A$, por ($\neg I$), de (v) e (vii).
- ix. $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$, por ($\neg I$), de (iv) e (viii).
- x. $\vdash (A \vee \neg A)$, por (EDN), de (ix).

O princípio $(\theta \vee \neg\theta)$ é às vezes chamado de *lei do terceiro excluído*. Este não é válido na lógica intuicionista.

Seja θ , $\neg\theta$ um par de contraditórias, e ψ seja qualquer sentença. Por (Pre) temos $\{\theta, \neg\theta, \neg\psi\} \vdash \theta$ e $\{\theta, \neg\theta, \neg\psi\} \vdash \neg\theta$. Então por ($\neg I$), $\{\theta, \neg\theta\} \vdash \neg\neg\psi$. Então, por (EDN) temos $\{\theta, \neg\theta\} \vdash \psi$.

Isto é, tudo segue de um par de contraditórias opostas. Alguns lógicos introduzem uma regra para codificar uma inferência similar:

Se $\Gamma_1 \vdash \theta$ e $\Gamma_2 \vdash \neg\theta$, então para qualquer sentença ψ , $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi$.

A inferência é algumas vezes chamada de *ex falso quodlibet* ou, de modo mais colorido, *explosão*. Alguns chamam isso “ \neg -eliminação”, mas talvez isso amplie um pouco a noção de “eliminação”. Nós não incluímos oficialmente o *ex falso quodlibet* como uma regra separada em D , mas como será mostrado abaixo (Teorema 10), cada instancia dele é derivável em seu novo sistema D .

Alguns lógicos objetam ao *ex falso quodlibet*, alegando que a sentença ψ pode ser *irrelevante* para qualquer das premissas em Γ . Suponha, por exemplo, que alguém comece com algumas premissas Γ sobre a natureza humana e fatos sobre certas pessoas, e então deduza tanto a sentença “Clinton teve relações sexuais extraconjugais” quanto “Clinton não teve relações sexuais

extraconjugais”. Pode-se talvez concluir que há alguma coisa errada com as premissas Γ . Mas devemos ser autorizados a deduzir *qualquer coisa* de Γ ? Deveríamos estar autorizados a deduzir “A economia é correta”?

Uma pequena minoria de lógicos, chamados *dialeteístas*, sustentam que algumas contradições são atualmente verdadeiras. Para eles, o *ex falso quodlibet* não preserva a verdade.

Sistemas dedutivos que respeitam o *ex falso quodlibet* são chamados *paraconsistentes*. A maior parte das lógicas relevantes (um tipo de lógica) são paraconsistentes. Veja os verbetes sobre lógica da relevância, lógica paraconsistente, e dialeteísmo. Ou veja Anderson e Belnap [1975], Anderson, Belnap, e Dunn [1992], e Tennant [1997] para visões gerais mais completas da lógica da relevância; e Priest [2006], [2006a] para o dialeteísmo. Questões filosóficas profundas sobre a natureza da consequência lógica são complexas. Longe de ser um artigo em uma enciclopédia de filosofia que evita problemas filosóficos, mas considerações de espaço impedem um tratamento mais completo desta questão aqui. Nos basta notar que a inferência *ex falso quodlibet* é sancionada nos sistemas da *lógica clássica*, objeto deste artigo. É essencial estabelecer o equilíbrio entre o sistema dedutivo e a semântica (ver §5 abaixo).

As próximas partes de *D* são as cláusulas para os quantificadores. Seja θ uma fórmula, v uma variável e t um termo (i.e. ou seja, uma variável ou uma constante). Então, definimos $\theta(v|t)$ como sendo o resultado da substituição de t em cada ocorrência *livre* de v em θ . Então, se θ é $(Qx \& \exists xPxy)$, então $\theta(x|c)$ é $(Qc \& \exists xPxy)$. A última ocorrência de x não é livre.

Uma sentença da forma $\forall v\theta$ é um análogo do português “para todo v , θ se mantém”. Então, deve-se ser capaz de inferir $\theta(v|t)$ de $\forall v\theta$ para qualquer termo fechado t . Lembre-se de que os únicos termos fechados em nosso sistema são constantes.

($\forall E$) Se $\Gamma \vdash \forall v\theta$, então $\Gamma \vdash \theta(v|t)$, para qualquer termo fechado t .

A ideia aqui é que, se $\forall v\theta$ é verdade, então θ deve se manter com t , não importa o que t seja.

A cláusula de introdução para o quantificador universal é um pouco mais complicada. Suponha que uma sentença θ contém um termo fechado t , e que θ tenha sido deduzida de um conjunto de premissas Γ . Se o termo fechado t não ocorrer em nenhum membro de Γ , então θ se manterá não importando a qual

objeto t denota. Isto é, $\forall v\theta$ se segue.

($\forall I$) Para qualquer termo fechado t , se $\Gamma \vdash \theta(v|t)$, então $\Gamma \vdash \forall v\theta$, dado que t não esteja em Γ ou θ .

Essa regra ($\forall I$) corresponde a uma inferência comum em matemática. Suponha que um matemático diga “seja n um número natural” e prossiga mostrando que tem n uma certa propriedade P , sem assumir nada sobre n (exceto que é um número natural). Ele então lembra ao leitor que n é “arbitrário” e conclui que P é válido para *todos* os números naturais. A condição de que o termo não ocorra em nenhuma premissa é o que garante que é de fato “arbitrário”. Poderia ser qualquer objeto, e então qualquer coisa que concluíssemos sobre isso vale para todos os objetos.

O quantificador existencial é um análogo da expressão portuguesa “existe”, ou talvez “há”. Se tivermos estabelecido (ou assumido) que um determinado objeto t tem uma dada propriedade, então segue-se que há alguma coisa que tem essa propriedade.

($\exists I$) Para qualquer termo fechado t , se $\Gamma \vdash \theta(v|t)$ então $\Gamma \vdash \exists v\theta$.

A regra de eliminação para \exists não é tão simples:

($\exists E$) Para qualquer termo fechado t , se $\Gamma_1 \vdash \exists v\theta$ e $\Gamma_2, \theta(v|t) \vdash \phi$, então $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \phi$, desde que não t não ocorra em ϕ, Γ_2 ou θ .

Essa regra de eliminação também corresponde a uma inferência comum. Suponha que um matemático assuma ou, de alguma forma, conclua que existe um número natural com uma dada propriedade P . Ele então diz “seja n tal número natural, de modo que Pn ”, e prossiga para estabelecer uma sentença ϕ , que não menciona o número n . Se a derivação de ϕ não invocar nada sobre n (exceto a suposição de que ele possui a propriedade P dada), então n poderia ter sido qualquer número que possuísse a propriedade P . Ou seja, n é um número *arbitrário* com propriedade P (aqui é onde invocamos constantes que “denotam” objetos arbitrários). Não importa qual o número n é. Como ϕ não menciona n , segue-se da afirmação de que algo tem a propriedade P . As condições adicionadas a ($\exists E$) são para garantir que t é “arbitrário”.

Os itens finais são as regras para o sinal de identidade “=”. A regra de introdução é bastante simples:

(=I) $\Gamma \vdash t = t$, onde t é qualquer termo fechado.

Essa “inferência” corresponde ao truísmo de que tudo é idêntico a si

mesmo. A regra de eliminação corresponde a um princípio de que se a é idêntico a b , então qualquer coisa verdadeira de a é também verdadeira de b .

(=E) Para qualquer termo fechado t_1 e t_2 , se $\Gamma_1 \vdash t_1 = t_2$ e $\Gamma_2 \vdash \theta$, então $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \theta'$, onde θ' é obtido de θ substituindo uma ou mais ocorrências de t_1 por t_2 .

A regra (=E) indica uma certa restrição nos recursos expressivos de nossa linguagem. Suponha, por exemplo, que Harry seja idêntico a Donald (já que seus pais travessos lhe deram dois nomes). De acordo com as intuições da maioria das pessoas, não se segue disso e "Dick sabe que Harry é mau" que "Dick sabe que Donald é mau", porque Dick talvez não saiba que Harry é idêntico a Donald. Contextos como esse, nos quais os idênticos não podem ser substituídos com segurança uns pelos outros, são chamados de "opacos". Assumimos que nossa linguagem $L1K=$ não possui contextos opacos.

Uma cláusula final completa a descrição do sistema dedutivo D :

(*) Isso é tudo pessoal, $\Gamma \vdash \theta$ somente se θ segue dos membros de Γ pelas regras acima.

Novamente, esta cláusula permite provas por indução nas regras usadas para estabelecer um argumento. Se uma propriedade de argumentos se mantém em todas as instâncias de (Pre) e de (=I), e se as outras regras preservam a propriedade, então cada argumento que é dedutível em D tem a propriedade em questão.

Antes de passarmos para a teoria dos modelos de $L1K=$, nós faremos uma pausa para observar algumas características do sistema dedutivo. Para ilustrar o nível de rigor, começamos com um lema de que, se uma sentença não contém um termo fechado particular, podemos fazer pequenas alterações no conjunto de sentenças de onde o provamos sem problemas. Nós nos permitimos a liberdade aqui de estender uma noção anterior: para qualquer termo t e t' , e qualquer fórmula θ , nós falamos que $\theta(t|t')$ é o resultado da substituição de todas as ocorrências livres de t em θ por t' .

Lema 7. Se Γ_1 e Γ_2 diferem apenas em que Γ_1 contém θ , Γ_2 contém $\theta(t|t')$, então, para qualquer sentença ϕ não contendo t ou t' , se $\Gamma_1 \vdash \phi$ então $\Gamma_2 \vdash \phi$.

Prova: A prova procede por indução sobre o número de passos na prova

de ϕ . Crucial para esta prova é o fato de que $\theta = \theta(t|t')$ sempre que θ não contém t ou t' . Quando o número de etapas na prova de ϕ é um, isso significa que a última (e única) regra é aplicada (Pre) ou (=I). Então, como ϕ não contém t ou t' , se $\Gamma_1 \vdash \phi$, nós simplesmente aplicamos a mesma regra ((Pre) ou (=I)) a Γ_2 para obter $\Gamma_2 \vdash \phi$. Suponha que existam $n > 1$ passos na prova de ϕ , e que o Lema 8 vale para qualquer prova com menos de n passos. Suponha que a enésima regra aplicada Γ_1 seja (&I). Então ϕ é $\psi \& \chi$, e $\Gamma_1 \vdash \phi \& \chi$. Mas sabemos que as etapas anteriores da prova incluem $\Gamma_1 \vdash \psi$ e $\Gamma_1 \vdash \chi$, e por indução, temos $\Gamma_2 \vdash \psi$ e $\Gamma_2 \vdash \chi$, já que nem ψ nem χ contém t ou t' . Então, simplesmente aplicamos (&I) a Γ_2 para obter $\Gamma_2 \vdash \psi \& \chi$ conforme necessário. Suponha agora que o último passo aplicado na prova de $\Gamma_1 \vdash \phi$ seja (&E). Então, em um passo anterior, na prova de ϕ , sabemos que $\Gamma_1 \vdash \phi \& \psi$ para alguma sentença ψ . Se ψ não contém t , então simplesmente aplicamos (&E) a Γ_2 para obter o resultado desejado. A única complicação é se ψ contiver t . Então nós teríamos que $\Gamma_2 \vdash (\phi \& \psi)(t|t')$. Mas, já que $(\phi \& \psi)(t|t')$ é $\phi(t|t') \& \psi(t|t')$, e $\phi(t|t')$ é apenas ϕ , podemos apenas aplicar (&E) para obter $\Gamma_2 \vdash \phi$, como requerido. Os casos para as outras regras são semelhantes.

Teorema 8. A regra do enfraquecimento. Se $\Gamma_1 \vdash \phi$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_2 \vdash \phi$.

Prova: De novo, procedemos por indução sobre o número de regras que foram usadas para chegar a $\Gamma_1 \vdash \phi$. Suponha que $n > 0$ seja um número natural, e que o teorema seja válido para qualquer argumento derivado usando menos que n regras. Suponha que $\Gamma_1 \vdash \phi$ usando exatamente n regras. Se $n = 1$, então a regra é (Pre) ou (=I). Nesses casos, $\Gamma_2 \vdash \phi$ pela mesma regra. Se a última regra aplicada foi (&I), então ϕ tem a forma $(\theta \& \psi)$, e temos $\Gamma_3 \vdash \theta$ e $\Gamma_4 \vdash \psi$, com $\Gamma_1 = \Gamma_3, \Gamma_4$. Aplicamos a hipótese de indução às deduções de θ e ψ , para obter $\Gamma_2 \vdash \theta$ e $\Gamma_2 \vdash \psi$. E então aplique (&I) ao resultado para obter $\Gamma_2 \vdash \phi$. A maioria dos outros casos é exatamente como este. Ligeiras complicações surgem apenas nas regras (\forall I) e (\exists E), porque nelas temos de prestar atenção às condições para as regras.

Suponha que a última regra aplicada para obter $\Gamma_1 \vdash \phi$ seja (\forall I). Então ϕ é uma sentença de forma $\forall v \theta$, e nós temos que $\Gamma_1 \vdash \theta(v|t)$ e t ocorre em qualquer membro Γ_1 ou em θ . O problema é que t pode ocorrer em um membro

de Γ_2 , e, portanto, não podemos simplesmente invocar a hipótese de indução e aplicar $(\forall I)$ ao resultado. Então, seja t' um termo que não ocorre em nenhuma sentença em Γ_2 . Seja Γ' o resultado de substituir por t' todo t em Γ_2 . Então, já que t não ocorre em Γ_1 , $\Gamma_1 \subseteq \Gamma'$. Desta forma, a hipótese de indução nos dá $\Gamma' \vdash \theta(v|t)$, e sabemos que Γ' não contém t , de modo que podemos aplicar $(\forall I)$ para obter $\Gamma' \vdash \forall v\theta$. Mas $\forall v\theta$ não contém t ou t' , logo $\Gamma_2 \vdash \forall v\theta$ pelo lema 7.

Suponha que a última regra aplicada tenha sido $(\exists E)$, e que temos $\Gamma_3 \vdash \exists v\theta$ e $\Gamma_4, \theta(v|t) \vdash \phi$, com Γ_1 sendo Γ_3, Γ_4 , e com t não estando em ϕ , Γ_4 ou θ . Se t não ocorrer livre em Γ_2 , aplicamos a hipótese de indução para obter $\Gamma_2 \vdash \exists v\theta$, e então $(\exists E)$, para terminar com $\Gamma_2 \vdash \phi$. Se t ocorrer livre em Γ_2 , então seguimos um procedimento semelhante ao $\forall I$, usando o Lema 7.

Teorema 8 nos permite adicionar as premissas à vontade. Segue-se que $\Gamma \vdash \phi$ se e somente se houver um subconjunto $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma' \vdash \phi$. Alguns sistemas de lógica relevante não tem enfraquecimento, o mesmo vale para lógica sub-estrutural. (veja os verbetes sobre lógica da relevância, lógica sub-estrutural e lógica linear).

Pela cláusula (*), todas as derivações são estabelecidas em um número finito de etapas. Então nós temos

Teorema 9. $\Gamma \vdash \phi$ se e somente se houver um $\Gamma' \subseteq \Gamma$ finito, tal que $\Gamma' \vdash \phi$.

Teorema 10. A regra do *ex falso quodlibet* é uma "regra derivada" de D : se $\Gamma_1 \vdash \theta$ e $\Gamma_2 \vdash \neg\theta$, então $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi$, para qualquer sentença ψ .

Prova: suponha que $\Gamma_1 \vdash \theta$ e $\Gamma_2 \vdash \neg\theta$. Então pelo teorema 8 $\Gamma_1, \neg\psi \vdash \theta$, e $\Gamma_2, \neg\psi \vdash \neg\theta$. Então por $(\neg I)$, $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \neg\neg\psi$. Por (EDN) , $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi$.

Teorema 11. A regra do Corte. Se $\Gamma_1 \vdash \psi$ e $\Gamma_2, \psi \vdash \theta$, então $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \theta$.

Prova: Suponha $\Gamma_1 \vdash \psi$ e $\Gamma_2, \psi \vdash \theta$. Procedemos pela indução sobre o número de regras usadas para estabelecer $\Gamma_2, \psi \vdash \theta$. Suponha que n é um número natural, e que o teorema seja válido para qualquer argumento derivado usando menos de n regras. Suponha que $\Gamma_2, \psi \vdash \theta$ foi derivado usando exatamente n regras. Se a última regra usada foi $(=I)$, então $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \theta$ é também uma instancia de $(=I)$. Se $\Gamma_2, \psi \vdash \theta$ é uma instância de (Pre) , então ou θ é ψ , ou θ é um membro de Γ_2 . No primeiro caso, temos $\Gamma_1 \vdash \theta$ por suposição, e obtemos $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \theta$ por enfraquecimento (Teorema 8). No último

caso, $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \theta$ é em si uma instancia de (Pre). Suponha que $\Gamma_2, \psi \vdash \theta$ foi obtido usando (&E). Então nós temos $\Gamma_2, \psi \vdash (\theta \ \& \ \phi)$. A hipótese de indução nos dá $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (\theta \ \& \ \phi)$, e (&E) produz $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \theta$. Os casos restantes são semelhantes.

O Teorema 11 nos permite encadear inferências. Isso se encaixa na prática de estabelecer teoremas e lemas e depois usar esses teoremas e lemas mais tarde, à vontade. O princípio do corte, segundo alguns, é essencial para o raciocínio. Em alguns sistemas lógicos, o princípio do corte é um teorema profundo; em outros é inválido. O sistema aqui foi projetado, em parte, para tornar clara a prova do Teorema 11.

Se $\Gamma \vdash_D \theta$, então dizemos que a sentença θ é uma *consequência dedutiva* do conjunto de sentenças Γ , e que o argumento $\langle \Gamma, \theta \rangle$ é *dedutivamente válido*. Uma sentença θ é um *teorema lógico*, ou uma *verdade lógica dedutiva*, se $\vdash_D \theta$. Isto é, θ é um teorema lógico, se é uma consequência dedutiva do conjunto vazio. Um conjunto Γ de sentenças é *consistente*, se não houver sentença θ tal que $\Gamma \vdash_D \theta$ e $\Gamma \vdash_D \neg\theta$. Isto é, um conjunto é consistente se não implicar um par de sentença contraditórias.

Teorema 12. Um conjunto Γ é consistente se e somente se houver uma sentença θ tal que não seja o caso de $\Gamma \vdash \theta$.

Prova: Suponha que Γ seja consistente e seja θ qualquer sentença. Então ou não é o caso que $\Gamma \vdash \theta$ ou não é o caso que $\Gamma \vdash \neg\theta$. Para a conversa, suponha que Γ é inconsistente e seja ψ qualquer sentença. Temos que há uma sentença tal que ambos $\Gamma \vdash \theta$ e $\Gamma \vdash \neg\theta$. Pelo *ex falso quodlibet* (Teorema 10), $\Gamma \vdash \psi$.

Defina um conjunto Γ de sentenças da linguagem $L1K=$ como sendo *maximamente consistente*, se Γ for consistente e, para cada sentença θ de $L1K=$, se θ não estiver em Γ , então Γ, θ é inconsistente. Em outras palavras, Γ é maximamente consistente se Γ é consistente, e adicionar qualquer sentença na linguagem que ainda não esteja em Γ o torna inconsistente. Note que se Γ é maximamente consistente, então $\Gamma \vdash \theta$ se e somente se θ está em Γ .

Teorema 13. O Lema de Lindenbaum. Seja Γ qualquer conjunto consistente de sentenças de $L1K=$. Então há um conjunto Γ' de sentenças de $L1K=$ tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$ e Γ' é maximamente consistente.

Prova: Embora esse teorema seja válido em geral, assumimos aqui

que o conjunto K da terminologia não lógica é ou finito ou enumeravelmente infinito (isto é, o tamanho dos números naturais, geralmente chamados \aleph_0). Segue-se que há uma enumeração $\theta_0, \theta_1, \dots$ das sentenças de $L1K=$, de modo que cada sentença de $L1K=$ eventualmente ocorre na lista. Defina uma sequência de conjuntos de sentenças, por recursão, da seguinte maneira: Γ_0 é Γ ; para cada número natural n , se Γ_n, θ_n é consistente, então tome $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n, \theta_n$. Caso contrário, deixe $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$. Seja Γ' a união de todos os conjuntos Γ_n . Intuitivamente, a ideia é passar pelas sentenças de $L1K=$, jogando cada uma em Γ' , se isso produzir um conjunto consistente. Observe que cada Γ_n é consistente. Suponha que Γ' é inconsistente. Então há uma sentença θ tal que $\Gamma' \vdash \theta$ e $\Gamma' \vdash \neg\theta$. Pelo Teorema 9 e pelo Enfraquecimento (teorema 8), existe um subconjunto finito Γ'' de Γ' tal que $\Gamma'' \vdash \theta$ e $\Gamma'' \vdash \neg\theta$. Como Γ'' é finito, existe um número natural n tal que todo membro de Γ'' está em Γ_n . Então, pelo Enfraquecimento novamente, $\Gamma_n \vdash \theta$ e $\Gamma_n \vdash \neg\theta$. Então Γ_n é inconsistente, o que contradiz a construção. Então Γ' é consistente. Agora suponha que uma sentença θ não esteja em Γ' . Temos que mostrar que Γ', θ é inconsistente. A sentença θ deve ocorrer na lista de sentenças mencionada anteriormente; diga que θ é θ_m . Como θ_m não está em Γ' , então não está em Γ_{m+1} . Isso acontece apenas se Γ_m, θ_m é inconsistente. Assim um par de contraditórias pode ser deduzido de Γ_m, θ_m . Pelo Enfraquecimento, um par de contraditórias pode ser deduzido de Γ', θ_m . Então Γ', θ_m é inconsistente. Assim Γ' é maximamente consistente.

Observe que esta prova usa um princípio correspondendo à lei do terceiro excluído. Na construção de Γ' , assumimos que, em cada estágio, ou Γ_n é consistente ou não é. Os intuicionistas, que se opõem ao terceiro excluído, não aceitam o lema de Lindenbaum.

4. Semântica

Seja K um conjunto de terminologia não lógica. Uma *interpretação* para a linguagem $L1K=$ é a estrutura $M = \langle d, I \rangle$, onde d é um conjunto não vazio, chamado de *domínio-do-discurso*, ou simplesmente *domínio*, da interpretação, e I é uma *função de interpretação*. Informalmente, o domínio é aquilo sobre o qual

interpretamos que a linguagem $L1K=$ fala. É aquilo sobre o qual as variáveis versam. A função de interpretação atribui extensões apropriadas aos termos não lógicos. Em particular,

Se c é uma constante em K , então $I(c)$ é um membro do domínio d .

Assim, assumimos que toda constante denota algo. Sistemas onde isso não é assumido são chamados *lógicas livres* (veja o verbete sobre lógica-livre). Continuando,

Se P^0 é uma letra predicativa de zero posições em K , então $I(P)$ é um valor de verdade, a verdade ou a falsidade.

Se Q^1 é uma letra predicativa de uma posição em K , então $I(Q)$ é um subconjunto de d . Intuitivamente, $I(Q)$ é o conjunto de membros do domínio do qual o predicado Q é válido. Se Q representa "vermelho", então $I(Q)$ é o conjunto de membros vermelhos do domínio.

Se R^2 é uma letra predicativa de duas posições em K , então $I(R)$ é um conjunto de pares ordenados de membros de d . Intuitivamente, $I(R)$ é o conjunto de pares de membros do domínio que a relação R mantém. Se R representa "amor", então $I(R)$ é um conjunto de pares ordenados $\langle a, b \rangle$ tal que a e b são os membros do domínio para o qual a ama b .

Em geral, se S^n é uma letra predicativa de n -posições em K , então $I(S)$ é um conjunto de ênuplas ordenadas de membros de d .

Defina s como sendo uma *atribuição de variável*, ou simplesmente uma *atribuição*, em uma interpretação M , se s é uma função das variáveis para o domínio d de M . O papel da atribuição de variáveis é atribuir denotações às variáveis *livres* de fórmulas abertas. (Num certo sentido, os quantificadores determinam "significado" das variáveis ligadas.)

Seja t um termo de $L1K=$. Definimos a *denotação* de t em M sob s , em termos da função de interpretação e atribuição de variáveis:

Se t é uma constante, então $D_{M,s}(t) = I(t)$, e se t é uma variável, então $D_{M,s}(t) = s(t)$

Ou seja, a interpretação M atribui denotações às constantes, enquanto a atribuição de variáveis atribui denotações às variáveis (livres). Se a linguagem contiver símbolos funcionais, a função de denotação seria definida por recursão.

Nós agora definimos a relação de *satisfação* entre interpretações, atribuições de variáveis e fórmulas de $L1K=$. Se ϕ é uma fórmula de $L1K=$, M

é uma interpretação para $L1K=$, e s é uma atribuição de variável em M , então escrevemos $M, s \models \phi$ para M satisfaz ϕ sob a atribuição s . A ideia é que $M, s \models \phi$ é um análogo de “ ϕ é verdadeiro quando interpretado como M via s ”.

Nós procedemos por recursão na complexidade das fórmulas de $L1K=$.

Se t_1 e t_2 são termos, então $M, s \models t_1 = t_2$ se e somente se $D_{M,s}(t_1)$ é o mesmo que $D_{M,s}(t_2)$.

Isso é tão simples quanto parece. Uma identidade $t_1 = t_2$ é verdadeira se e somente os termos t_1 e t_2 denotam a mesma coisa.

Se P^0 é uma letra predicativa de zero posições em K , então $M, s \models P$ se e somente se $I(P)$ for verdade.

Se S^n é uma letra predicativa de n -posições em K e t_1, \dots, t_n são termos, então $M, s \models St_1 \dots t_n$ se e somente se a ênupla $\langle D_{M,s}(t_1), \dots, D_{M,s}(t_n) \rangle$ está em $I(S)$.

Isso dá conta das fórmulas atômicas. Passamos agora para as fórmulas compostas da linguagem, seguindo mais ou menos os significados das contrapartes portuguesas da terminologia lógica.

$M, s \models \neg\theta$ se e somente se não for o caso que $M, s \models \theta$.

$M, s \models (\theta \ \& \ \psi)$ se e somente ambos $M, s \models \theta$ e $M, s \models \psi$.

$M, s \models (\theta \ \vee \ \psi)$ se e somente se ou $M, s \models \theta$ ou $M, s \models \psi$.

$M, s \models (\theta \rightarrow \psi)$ se e somente se ou não é o caso que $M, s \models \theta$, ou $M, s \models \psi$.

$M, s \models \forall v\theta$ se e somente se $M, s' \models \theta$, para cada atribuição s' que concorda com s , exceto possivelmente na variável v .

A ideia aqui é que $\forall v\theta$ é verdadeiro se e somente se θ for verdadeiro, não importando o que for atribuído à variável v . A cláusula final é semelhante.

$M, s \models \exists v\theta$ se e somente se $M, s' \models \theta$, para alguma atribuição s' que esteja de acordo com s , exceto possivelmente na variável v .

Então $\exists v\theta$ sai verdadeiro se houver uma atribuição a v que torne θ verdadeiro.

O teorema 6, a legibilidade única, nos assegura que essa definição é coerente. Em cada estágio da quebra de uma fórmula, há exatamente uma cláusula a ser aplicada, e assim nunca obtemos veredictos contraditórios

sobre a satisfação.

Como indicado, o papel das atribuições de variáveis é dar denotações às variáveis livres. Mostraremos que as atribuições de variáveis não desempenham outro papel.

Teorema 14. Para qualquer fórmula θ , se s_1 e s_2 concordarem nas variáveis livres em θ , então $M, s_1 \models \theta$ se e somente se $M, s_2 \models \theta$.

Prova: Procederemos por indução na complexidade da fórmula θ . O teorema se mantém claramente se θ é atômico, pois nesses casos apenas os valores das atribuições de variáveis nas variáveis em θ figuram na definição. Suponha, então, que o teorema se mantenha para todas as fórmulas menos complexas que θ . E suponha que s_1 e s_2 concorda nas variáveis livres de θ . Suponha, primeiro, que θ é uma negação $\neg\psi$. Então, pela hipótese de indução, $M, s_1 \models \psi$ se e somente se $M, s_2 \models \psi$. Então, pela cláusula da negação, $M, s_1 \models \neg\psi$ se e somente se $M, s_2 \models \neg\psi$. Os casos em que o conectivo principal θ é binário também são claros. Suponha que θ é $\exists v\psi$, e que $M, s_1 \models \exists v\psi$. Então há uma atribuição s'_1 que concorda com s_1 exceto possivelmente em v tal que $M, s'_1 \models \psi$. Seja s'_2 a atribuição que concorda com s_2 nas variáveis livres não presentes em ψ e concorda com s'_1 nas outras. Então, pela hipótese de indução, $M, s'_2 \models \psi$. Observe que s'_2 concorda com s_2 em cada variável exceto possivelmente v . Então $M, s_2 \models \exists v\psi$. A conversa é a mesma coisa, e o caso em que θ começa com um quantificador universal é semelhante.

Pelo Teorema 14, se θ é uma sentença, e s_1, s_2 , são quaisquer duas atribuições de variáveis, então $M, s_1 \models \theta$ se e somente se $M, s_2 \models \theta$. Então, podemos apenas escrever $M \models \theta$ se $M, s \models \theta$ para algumas ou todas, atribuições de variáveis s . Então definimos

$M \models \theta$ onde θ é uma sentença apenas no caso de $M, s \models \theta$ para todas as atribuições de variáveis s .

Neste caso, chamamos M um *modelo* de θ .

Suponha que $K' \subseteq K$ são dois conjuntos de termos não lógicos. Se $M = \langle d, I \rangle$ é uma interpretação de $L1K$, então nós definimos a *restrição* de M para $L1K'$ como sendo a interpretação $M' = \langle d, I' \rangle$ tal que I' seja a restrição de I para K' . Ou seja, M e M' têm o mesmo domínio e concordam na terminologia não lógica em K' . Uma indução direta estabelece o seguinte:

Teorema 15. Se M' é a restrição de M a $L1K'$, então para toda sentença θ de $L1K'$, $M \models \theta$ se e somente se $M' \models \theta$.

Teorema 16. Se duas interpretações M_1 e M_2 tiverem o mesmo domínio e concordarem com toda a terminologia não lógica de uma sentença θ , então $M_1 \models \theta$ se e somente se $M_2 \models \theta$.

Em suma, a satisfação de uma sentença θ apenas depende do domínio do discurso e da interpretação da terminologia não lógica em θ .

Dizemos que um argumento $\langle \Gamma, \theta \rangle$ é *semanticamente válido*, ou apenas *válido*, escrito $\Gamma \models \theta$, se para toda interpretação M da linguagem, se $M \models \psi$, para todo membro ψ de Γ , então $M \models \theta$. Se $\Gamma \models \theta$, também dizemos que θ é uma *consequência lógica*, ou *consequência semântica*, ou *consequência na semântica de modelos* de Γ . A definição corresponde à ideia informal de que um argumento é válido se não for possível que todas as suas premissas sejam verdadeiras e sua conclusão seja falsa. Nossa definição de consequência lógica também sanciona a tese comum de que um argumento válido preserva a verdade – na medida em que a satisfação representa a verdade. Oficialmente, um argumento em $L1K$ é válido se sua conclusão der verdadeira sob toda interpretação da linguagem em que as premissas são verdadeiras. A validade é a contraparte semântica da dedutibilidade.

Uma sentença θ é *logicamente verdadeira*, ou *válida*, se $M \models \theta$ para toda interpretação M . Uma sentença é logicamente verdadeira se e somente se for uma consequência do conjunto vazio. Se θ é logicamente verdadeiro, então para qualquer conjunto Γ de sentenças, $\Gamma \models \theta$. A verdade lógica é a contraparte formal de o que é ser um teorema.

Uma sentença θ é *satisfatível* se houver uma interpretação M tal que $M \models \theta$. Isto é, θ é satisfatível se houver uma interpretação que a satisfaça. Um conjunto Γ de sentenças é satisfatível se houver uma interpretação M , tal que $M \models \theta$, para toda sentença θ em Γ . Se Γ é um conjunto de sentenças e se $M \models \theta$ para cada sentença θ em Γ , então dizemos que M é um *modelo* de Γ . Portanto, um conjunto de sentenças é satisfatível se ele tiver um modelo. A satisfatibilidade é a contraparte da semântica da consistência.

Note que $\Gamma \models \theta$ se e somente se o conjunto $\Gamma, \neg\theta$ não é satisfatível. Segue-se que se um conjunto Γ não é satisfatível, então se θ é qualquer sentença, $\Gamma \models \theta$. Esta é uma contraparte semântica do modelo *ex falso quodlibet* (ver

teorema 10). Temos o seguinte, como um análogo ao teorema 12:

Teorema 17. Seja Γ um conjunto de sentenças. As seguintes afirmações são equivalentes: (a) Γ é satisfável; (b) não há sentença θ tal que ambos $\Gamma \models \theta$ e $\Gamma \models \neg\theta$; (c) há alguma sentença ψ tal que não é o caso que $\Gamma \models \psi$.

Prova: (a) \Rightarrow (b): suponha que Γ é satisfável e seja θ qualquer sentença. Há uma interpretação M , tal que $M \models \psi$ para cada membro ψ de Γ . Pela cláusula para as negações, não podemos ter ambos $M \models \theta$ e $M \models \neg\theta$. Então, ou $\langle \Gamma, \theta \rangle$ não é válido ou então $\langle \Gamma, \neg\theta \rangle$ não é válido. (b) \Rightarrow (c): Isso é imediato. (c) \Rightarrow (a): Suponha que não é o caso que $\Gamma \models \psi$. Então há uma interpretação M tal que $M \models \theta$, para toda sentença θ em Γ , e não é o caso que $M \models \psi$. *A fortiori*, M satisfaz todos os membros de Γ , e, portanto, Γ é satisfável.

5. Meta-Teoria

Apresentamos agora alguns resultados que relacionam as noções dedutivas às suas contrapartes semânticas. O primeiro é provavelmente o mais simples. Nós motivamos as várias regras do sistema dedutivo D e as várias cláusulas na definição de satisfação em termos do significado das contrapartes portuguesas à terminologia lógica (mais ou menos, com as mesmas simplificações em ambos os casos). Assim, seria de se esperar que um argumento seja dedutível, ou dedutivamente válido, somente se for semanticamente válido.

Teorema 18. Correção. Para qualquer sentença θ e conjunto Γ de sentenças, se $\Gamma \vdash_D \theta$, então $\Gamma \models \theta$.

Prova: Procedemos por indução no número de cláusulas usadas para estabelecer $\Gamma \vdash \theta$. Portanto, seja n um número natural e assumamos que o teorema vale para qualquer argumento estabelecido como dedutivamente válido com menos n passos. E suponha que $\Gamma \vdash \theta$ tenha sido estabelecido usando exatamente n passos. Se a última regra aplicada foi (=I), então θ é uma sentença da forma $t = t$, e assim θ é logicamente verdadeira. *A fortiori*, $\Gamma \models \theta$. Se a última regra aplicada foi (Pre), então θ é um membro de Γ , e então é claro que qualquer interpretação que satisfaça cada membro de Γ também satisfaz θ . Suponha que a última regra aplicada foi (&I). Então θ tem a forma $(\phi \ \& \ \psi)$, e

nós temos $\Gamma_1 \vdash \phi$ e $\Gamma_2 \vdash \psi$, com $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$. A hipótese de indução nos dá $\Gamma_1 \models \phi$ e $\Gamma_2 \models \psi$. Suponha que M satisfaz todo membro de Γ . Então M satisfaz todo membro de Γ_1 , e assim M satisfaz ϕ . Da mesma forma, M satisfaz todos os membros de Γ_2 e, portanto, M satisfaz ψ . Assim, pela cláusula de “&” na definição de satisfação, M satisfaz θ . Então $\Gamma \models \theta$.

Suponha que a última cláusula aplicada seja $(\exists E)$. Então nós temos $\Gamma_1 \vdash \exists v\phi$ e $\Gamma_2, \phi(v|t) \vdash \theta$, onde $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$, e t não ocorre em ϕ, θ , ou em qualquer membro de Γ_2 .

Precisamos mostrar que $\Gamma \models \theta$. Pela hipótese de indução, temos que $\Gamma_1 \models \exists v\phi$ e $\Gamma_2, \phi(v|t) \models \theta$. Seja M uma interpretação, tal que M torne cada membro de Γ verdadeiro. Então, M faz com que todos os membros de Γ_1 e Γ_2 sejam verdadeiros. Então $M, s \models \exists v\phi$, para todas as atribuições de variáveis s , de modo que exista um s' , tal que $M, s' \models \phi$. Seja M' diferente de M apenas nesse $I_{M'}(t) = s'(v)$. Então, $M', s' \models \phi(v|t)$ e $M', s' \models \Gamma_2$, dado que t não ocorre em ϕ ou Γ_2 . Então, $M', s' \models \theta$. Como t não ocorre em θ e M' difere de M apenas em relação a $I_{M'}(t)$, $M, s' \models \theta$. Como θ é uma sentença, s' não importa, e então $M \models \theta$, conforme desejado. Observe aqui o papel das restrições sobre $(\exists E)$. Os outros casos são tão diretos quanto.

Corolário 19. Seja Γ um conjunto de sentenças. Se Γ é satisfatível, então Γ é consistente.

Prova: Suponha que Γ é satisfatível. Então seja M uma interpretação tal que M satisfaz todos os membros de Γ . Suponha que Γ é inconsistente. Então há uma sentença θ , tal que $\Gamma \vdash \theta$ e $\Gamma \vdash \neg\theta$. Pela correção (Teorema 18), $\Gamma \models \theta$ e $\Gamma \models \neg\theta$. Então nós temos que $M \models \theta$ e $M \models \neg\theta$. Mas isso é impossível, dada a cláusula da negação na definição de satisfação.

Mesmo que o sistema dedutivo D e a semântica formal de modelos tenham sido desenvolvidos com os significados da terminologia lógica em mente, não se deve esperar automaticamente que a conversa da correção (ou Corolário 19) se sustente. Por tudo que sabemos até agora, podemos não ter incluído regras de inferência suficientes para deduzimos todos os argumentos válidos. As conversas à correção e ao Corolário 19 estão entre os resultados mais importantes e influentes da lógica matemática. Nós começamos com o último.

Teorema 20. Completude. Gödel [1930]. Seja Γ um conjunto de sentenças. Se Γ é consistente, então Γ é satisfatível.

Prova: A prova de completude é um tanto complexa. Nós apenas a esboçamos aqui. Seja Γ um conjunto consistente de sentenças de $L1K=$. Novamente, assumimos por simplicidade que o conjunto K da terminologia não lógica é ou finito ou contavelmente infinito (embora o teorema seja válido mesmo se K for incontável). A tarefa é encontrar uma interpretação M , tal que M satisfaça todos os membros de Γ . Considere a linguagem obtida de $L1K=$ adicionando um estoque enumeravelmente infinito de novas constantes individuais c_0, c_1, \dots . Nós estipulamos que as constantes, c_0, c_1, \dots , são todas diferentes umas das outras e nenhuma delas ocorre em K . Uma característica interessante desta construção, devida a Leon Henkin, é que nós construímos uma interpretação da linguagem a partir da própria linguagem, usando algumas das constantes como membros do domínio de discurso. Seja $\theta_0(x), \theta_1(x), \dots$ uma enumeração das fórmulas da linguagem expandida com, no máximo, uma variável livre, de modo que cada fórmula com, no máximo, uma variável livre ocorra na lista eventualmente. Defina uma sequência $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots$ de conjuntos de sentenças (da linguagem expandida) por recursão da seguinte forma: $\Gamma_0 = \Gamma$; e $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n, (\exists x \theta_n \rightarrow \theta_n(x|c_i))$, onde c_i é a primeira constante na lista acima que não ocorre em θ_n ou em qualquer membro de Γ_n . A ideia subjacente aqui é que se $\exists x \theta_n$ é verdadeiro, então c_i será um tal x . Seja Γ a união dos conjuntos Γ_n .

Nós esboçamos uma prova de que Γ é consistente. Suponha que Γ seja inconsistente. Pelo teorema 9, há um subconjunto finito de Γ que é inconsistente, e portanto, um dos conjuntos Γ_n é inconsistente. Por hipótese, $\Gamma_0 = \Gamma$ é consistente. Seja n o menor número tal que Γ_n é inconsistente, mas $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n, (\exists x \theta_n \rightarrow \theta_n(x|c_i))$ é consistente. Por (\neg), temos que (1) $\Gamma_n \vdash \neg(\exists x \theta_n \rightarrow \theta_n(x|c_i))$. Por *ex falso quodlibet* (Teorema 10), $\Gamma_n, \neg \exists x \theta_n, \exists x \theta_n \vdash \theta_n(x|c_i)$. Então por (\rightarrow I), $\Gamma_n, \neg \exists x \theta_n \vdash (\exists x \theta_n \rightarrow \theta_n(x|c_i))$. A partir disso e (1), temos $\Gamma_n \vdash \neg \neg \exists x \theta_n$, por (\neg), e por (EDN) temos (2) $\Gamma_n \vdash \exists x \theta_n$.

Por (Pre), $\Gamma_n, \theta_n(x|c_i), \exists x \theta_n \vdash \theta_n(x|c_i)$. Então por (\rightarrow I), $\Gamma_n, \theta_n(x|c_i) \vdash (\exists x \theta_n \rightarrow \theta_n(x|c_i))$. A partir disso e (1), temos $\Gamma_n \vdash \neg \theta_n(x|c_i)$, por (\neg). Seja t um termo que não ocorra em θ_n ou em qualquer membro de Γ_n . Pela substituição

uniforme de t por c_i , podemos transformar a derivação de $\Gamma_n \vdash \neg\theta_n(x|c_i)$ em $\Gamma_n \vdash \neg\theta_n(x|t)$. Por $(\forall I)$, temos (3) $\Gamma_n \vdash \forall v \neg\theta_n(x|v)$.

Por (Pre) temos $\{\forall v \neg\theta_n(x|v), \theta_n\} \vdash \theta_n$ e por $(\forall E)$ temos $\{\forall v \neg\theta_n(x|v), \theta_n\} \vdash \theta_n$. Assim, $\{\forall v \neg\theta_n(x|v), \theta_n\}$ é inconsistente. Seja ϕ qualquer frase da linguagem. Por *ex falso quodlibet* (Teorema 10), temos que $\{\forall v \neg\theta_n(x|v), \theta_n\} \vdash \phi$ e $\{\forall v \neg\theta_n(x|v), \theta_n\} \vdash \neg\phi$. Então com (2), temos que $\Gamma_n, \forall v \neg\theta_n(x|v) \vdash \phi$ e $\Gamma_n, \forall v \neg\theta_n(x|v) \vdash \neg\phi$, by $(\exists E)$. Pelo Corte (Teorema 11), $\Gamma_n \vdash \phi$ e $\Gamma_n \vdash \neg\phi$. Então Γ_n é inconsistente, contradizendo a suposição. Então Γ' é consistente.

Aplicando o Lema de Lindenbaum (Teorema 13), seja Γ'' um conjunto de sentenças maximamente consistente (da linguagem expandida) que contenha Γ' . Então, é claro, Γ'' contém Γ . Podemos agora definir uma interpretação M , tal que M satisfaz todos os membros de Γ'' .

Se não tivéssemos um sinal para a identidade na linguagem, deixaríamos o domínio de M ser a coleção de novas constantes $\{c_0, c_1, \dots\}$. Mas como tal é, pode haver uma sentença da forma $c_i = c_j$, com $i \neq j$, em Γ'' . Se for assim, não podemos ter ambos c_i e c_j no domínio da interpretação (por elas são constantes distintas). Então definimos o domínio d de M como sendo o conjunto $\{c_i \mid \text{não há } j < i \text{ tal que } c_i = c_j \text{ está em } \Gamma''\}$. Em outras palavras, uma constante c_i está no domínio de M , se Γ'' não a declara como idêntica a uma constante anterior da lista. Note que para cada nova constante c_i , existe exatamente um $j \leq i$ tal que c_j está em d e a sentença $c_i = c_j$ está em Γ'' .

Nós agora definimos uma função de interpretação. Seja a uma constante na linguagem expandida. Pelo $(=I)$ e $(\exists I)$, $\Gamma'' \vdash \exists x x = a$, e assim $\exists x x = a \in \Gamma''$. Pela construção de Γ'' , há uma sentença da forma. $(\exists x x = a \rightarrow c_i = a)$ em Γ'' . Temos que $c_i = a$ está em Γ'' . Como acima, há exatamente um c_i em d tal que $c_i = c_j$ está em Γ'' . Seja $I(a) = c_j$. Note que se c_i é uma constante no domínio d , então $I(c_i) = c_i$. Isto é, cada c_i em d denota a si mesmo.

Seja P uma letra predicativa de zero posições em K . Então $I(P)$ é verdade se P está em Γ'' e $I(P)$ é uma falsidade de qualquer outra forma. Seja Q uma letra predicativa de uma posição em K . Então $I(Q)$ é o conjunto de constantes $\{c_i \mid c_j \text{ está em } d \text{ e a sentença } Qc_i \text{ é em } \Gamma''\}$. Seja R uma letra predicativa binária em K . Então $I(R)$ é o conjunto de pares de constantes $\{(c_i, c_j) \mid c_i \text{ está em } d, c_j \text{ está em } d, \text{ e a sentença } Rc_i c_j \text{ é em } \Gamma''\}$. Predicados de três posições, etc. são interpretados de forma semelhante. Com efeito, I interpreta

a terminologia não tal lógica como elas estão em Γ ".

As atribuições de variáveis são semelhantes. Se v é uma variável, então $s(v)=c_j$, onde c_j é a primeira constante em d , tal que $c_j = v$ está em Γ ".

O item final nesta prova é um lema que para cada fórmula θ na linguagem expandida, $M \models \theta$ se e somente se θ está em Γ ". Isto prossegue por indução na complexidade de θ . O caso em que θ é atômico decorre das definições de M (isto é, o domínio d e a função de interpretação I , e a atribuição de variável s). Os outros casos decorrem das várias cláusulas na definição de satisfação.

Dado que $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ", temos que M satisfaz todos os membros de Γ . Pelo Teorema 15, a restrição de M à língua original $L1K=$ e s também satisfaz todo membro de Γ . Assim, Γ é satisfável.

Uma conversa da Correção (Teorema 18) é um colorário direto:

Teorema 21. Para qualquer sentença θ e conjunto Γ de sentenças, se $\Gamma \models \theta$, então $\Gamma \vdash_D \theta$.

Prova: Suponha que $\Gamma \models \theta$. Então não há interpretação M tal que M satisfaça todo membro de Γ mas não satisfaça θ . Então o conjunto $\Gamma, \neg\theta$ não é satisfável. Por Completude (Teorema 20), $\Gamma, \neg\theta$ é inconsistente. Portanto, há uma sentença ϕ tal que $\Gamma, \neg\theta \vdash \phi$ e $\Gamma, \neg\theta \vdash \neg\phi$. Por ($\neg I$), $\Gamma \vdash \neg\neg\theta$, e por (EDN) $\Gamma \vdash \theta$.

Nosso próximo item é um corolário do Teorema 9, Correção (Teorema 18) e Completude:

Corolário 22. Compacidade [*compactness*]: Um conjunto Γ de sentenças é satisfável se e somente se todo subconjunto finito de Γ for satisfável.

Prova: Se M satisfizer todos os membros de Γ , então, M satisfaz todos membros de cada subconjunto finito de Γ . Pela conversa, suponha que Γ não seja satisfável. Então mostramos que alguns subconjuntos finitos de Γ não são satisfáveis. Pela completude (Teorema 20), Γ é inconsistente. Pelo Teorema 9 (e Enfraquecimento), existe um subconjunto finito $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que Γ' é inconsistente. Pelo corolário 19, Γ' não é satisfável.

Correção e Completude juntos implicam que um argumento é dedutível se e somente se for válido, e um conjunto de sentenças é consistente se e somente for satisfável. Assim podemos ir e voltar entre noções de teoria

dos modelos e de teoria da prova, transferindo propriedades de uma para a outra. A Compactação [ou Compacidade] se mantém na teoria dos modelos, porque todas as derivações usam apenas um número finito de premissas.

Lembre-se de que, na prova de Completude (Teorema 20), fizemos a suposição simplificadora de que o conjunto K de constantes não lógicas é ou finito ou enumeravelmente infinito. A interpretação que produzimos foi ela mesma ou finita ou enumeravelmente infinita. Assim nós temos o seguinte:

Corolário 23. Teorema de Löwenheim-Skolem. Seja Γ um conjunto satisfatível de sentenças da linguagem $L1K=$. Se Γ é finito ou enumeravelmente infinito, então Γ tem um modelo cujo domínio é ou finito ou enumeravelmente infinito.

Em geral, seja Γ um conjunto satisfatível de sentenças de $L1K=$, e seja K o maior tamanho de Γ e enumeravelmente infinito. Então Γ tem um modelo cujo domínio é em grande parte K .

Há uma versão mais forte do Corolário 23. Seja $M_1 = \langle d_1, I_1 \rangle$ e $M_2 = \langle d_2, I_2 \rangle$ interpretações da linguagem $L1K=$. Defina M_1 como um *submodelo* de M_2 se $d_1 \subseteq d_2, I_1(c) = I_2(c)$, para cada constante c , e I_1 é a restrição de I_2 para d_1 . Por exemplo, se R é uma letra de relação binária em K , então para todos a, b em d_1 , o par $\langle a, b \rangle$ está em $I_1(R)$ se e somente se $\langle a, b \rangle$ está em $I_2(R)$. Se tivéssemos incluído letras funcionais entre a terminologia não lógica, também exigiríamos que d_1 fosse fechado sob suas interpretações em M_2 . Observe que se M_1 é um submodelo de M_2 , então qualquer atribuição de variável em M_1 é também uma atribuição de variável em M_2 .

Digamos que duas interpretações $M_1 = \langle d_1, I_1 \rangle$, $M_2 = \langle d_2, I_2 \rangle$ são *equivalentes* se uma delas é submodelo de outra, e para qualquer fórmula da linguagem e qualquer atribuição de variável s no submodelo, $M_1, s \models \theta$ se e somente se $M_2, s \models \theta$. Observe que se as duas interpretações são equivalentes, elas satisfazem as mesmas sentenças.

Teorema 25. Teorema de Löwenheim-Skolem. Descendente. Seja $M = \langle d, I \rangle$ uma interpretação da linguagem $L1K=$. Seja d_1 qualquer subconjunto de d , e seja κ o tamanho máximo de K , o tamanho de d_1 , e enumeravelmente infinito. Então há um submodelo $M' = \langle d', I' \rangle$ de M tal que (1) d' não é maior que κ e (2) M e M' são equivalentes. Em particular, se o conjunto K da terminologia não lógica

for ou finito ou enumeravelmente infinito. Então, qualquer interpretação tem um submodelo equivalente cujo domínio é ou finito ou enumeravelmente infinito.

Prova: Como a completude, essa prova é complexa, e nos resta nos contentarmos com um esboço. O teorema descendente de Löwenheim-Skolem invoca o axioma da escolha e, de fato, é equivalente ao axioma da escolha (veja o verbete sobre axioma da escolha). Então seja C uma função de escolha sobre o conjunto potência de d , de modo que para cada subconjunto não vazio $e \subseteq d$, $C(e)$ é um membro de e . Estipulamos que se e é o conjunto vazio, então $C(e)$ é $C(d)$.

Seja s ser uma atribuição variável em M , seja θ uma fórmula de $L1K=$, e seja v uma variável. Defina a v -testemunha de θ sobre s , escrito $w_v(\theta, s)$, como se segue: Seja q o conjunto de todos os elementos $c \in d$, tal que exista uma atribuição de variável s' em M que concorda com s em cada variável exceto possivelmente v , tal que $M, s' \models \theta$, e $s'(v) = c$. Então $w_v(\theta, s) = C(q)$. Observe que se $M, s \models \exists v\theta$, então q é o conjunto de elementos do domínio que podem substituir v em θ . De fato, $M, s \models \exists v\theta$ se e somente se q for não vazio. Então se $M, s \models \exists v\theta$, então $w_v(\theta, s)$ (isto é, $C(q)$) é um elemento escolhido do domínio que pode substituir v em θ . Em certo sentido, é uma "testemunha" que verifica $M, s \models \exists v\theta$.

Se e é um subconjunto não vazio do domínio d , então defina uma atribuição de variável s como sendo uma e -atribuição, se para todas as variáveis u , $s(u)$ está em e . Isto é, s é uma e -atribuição se s atribui um elemento de e para cada variável. Defina $sk(e)$, o *Envoltória de Skolem* [*Skolem-hull*] de e , como sendo o conjunto:

$$e \cup \{w_v(\theta, s) \mid \theta \text{ é uma fórmula em } L1K=, \\ v \text{ é uma variável, e} \\ s \text{ é uma } e\text{-atribuição}\}.$$

Isto é, o Envoltória de Skolem-Hull de e é o conjunto e junto com todo v -testemunha de cada fórmula sobre cada e -atribuição. A grosso modo, a ideia é começar com e e, em seguida, incluir elementos suficientes para tornar cada fórmula quantificada existencialmente verdadeira. Mas não podemos nos contentar com o Envoltória de Skolem-Hull. Uma vez que lançamos as "testemunhas" no domínio, precisamos lidar com as atribuições $sk(e)$. De fato, precisamos de um conjunto que seja seu próprio Envoltória de Skolem-Hull, e

também contenha o dado subconjunto d_1 .

Definimos uma sequência de conjuntos não vazios e_0, e_1, \dots como se segue: se o dado subconjunto d_1 de d for vazio e não houver constantes em K , então tome e_0 como sendo $C(d)$, a função de escolha aplicada a todo domínio; De outro modo, seja e_0 a união de d_1 com as denotações sob I das constantes em K . Para cada número natural n , e_{n+1} é $sk(e_n)$. Finalmente, seja d' a união dos conjuntos e_n , e seja I' a restrição de I para d' . Nossa interpretação é $M' = \langle d', I' \rangle$.

Claramente, d_1 é um subconjunto de d' , e então M' é um submodelo de M . Seja κ o tamanho máximo de K , o tamanho de d_1 , e enumeravelmente infinito. Um cálculo revela que o tamanho de d' é, no máximo, κ , baseado no fato de que existem, no máximo, número κ de fórmulas e, portanto, no máximo o número κ de testemunhas em cada estágio. Observe, incidentemente, que este cálculo se baseia no fato de que uma união enumerável de conjuntos de tamanho no máximo κ é, ela mesma no máximo, κ . Isso também depende do axioma da escolha.

O item final é mostrar que M' é equivalente a M : para cada fórmula θ e cada atribuição de variável s em M' ,

$$M, s \models \theta \text{ se e somente se } M', s \models \theta.$$

A prova procede por indução na complexidade de θ . Infelizmente, as restrições do espaço exigem que deixemos este passo como um exercício.

Outro corolário da Compacidade (Corolário 22) é o oposto do teorema de Löwenheim-Skolem:

Teorema 26. Teorema Löwenheim-Skolem Ascendente. Seja Γ qualquer conjunto de sentenças de $L1K=$, tal que para cada número natural n , há uma interpretação $M_n = \langle d_n, I_n \rangle$, e uma atribuição s_n em M_n , tal que d_n tenha pelo menos n elementos, e M_n, s_n satisfaz todos os membros de Γ . Em outras palavras, Γ é satisfatível e não há um limite superior finito para o tamanho das interpretações que satisfazem todo membro de Γ . Então para qualquer cardinal infinito K , há uma interpretação $M = \langle d, I \rangle$ e atribuição s em M , tal que o tamanho de d é pelo menos κ , e M, s satisfaz todo membro de Γ . Em particular, se Γ é um conjunto de sentenças, então ele possui modelos arbitrariamente grandes.

Prova: Adicione uma coleção de novas constantes $\{c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ de

tamanho κ , à linguagem, de modo que se c é uma constante em K , então c_α é diferente de c , e se $\alpha < \beta < K$, então c_α é uma constante diferente de c_β . Considere o conjunto de fórmulas Γ' consistindo de Γ juntamente com o conjunto $\{\neg c_\alpha = c_\beta \mid \alpha \neq \beta\}$. Isto é, Γ' consiste em Γ junto com declarações no sentido de que quaisquer duas novas constantes diferentes denotam objetos diferentes. Seja Γ'' qualquer subconjunto finito de Γ' , e seja m o número de novas constantes que ocorrem em Γ'' . Em seguida, expanda a interpretação M_m para uma interpretação M'_m da nova linguagem, ao interpretar cada uma das novas constantes em Γ'' como um membro diferente do domínio d_m . Por hipótese, há membros suficientes de d_m para fazer isso. Pode-se interpretar as outras novas constantes à vontade. Então M_m é uma restrição de M'_m . Por hipótese (e pelo Teorema 15), M_m, s_m satisfaz todo membro de Γ . Também M'_m, s_m satisfaz os membros de $\{\neg c_\alpha = c_\beta \mid \alpha \neq \beta\}$ que estão em Γ'' . Então M'_m, s_m satisfaz todos os membros de Γ'' . Pela Compactação, há uma interpretação $M = \langle d, I \rangle$ e uma atribuição s em M , tal que M, s satisfaz cada membro de Γ' . Como Γ' contém todos os membros de $\{\neg c_\alpha = c_\beta \mid \alpha \neq \beta\}$, o domínio d de M deve ser o tamanho pelo menos de κ , uma vez que cada uma das novas constantes deve ter uma denotação diferente. Pelo Teorema 15, a restrição de M à linguagem original $L1K=$ satisfaz todos os membros de Γ , com a atribuição de variável s .

Combinadas, as provas dos teoremas de Löwenheim-Skolem descendente e ascendente mostram que, para qualquer conjunto Γ satisfatível de sentenças, se não há um limite finito nos modelos de Γ , então para qualquer cardinal infinito, há um modelo cujo domínio tem *exatamente* o tamanho de κ . Além disso, se M é qualquer interpretação cujo domínio é infinito, então para qualquer cardinal infinito κ , há uma interpretação M' cujo domínio tem exatamente o tamanho de κ , tal que M e M' são equivalentes.

Estes resultados indicam uma fraqueza nos recursos expressivos de linguagens de primeira ordem como $L1K=$. Nenhum conjunto satisfatível de sentenças pode garantir que seus modelos sejam todos enumeravelmente infinitos, nem qualquer conjunto satisfatível de sentenças pode garantir que seus modelos sejam incontáveis. Então, em certo sentido, as linguagens de primeira ordem não podem expressar a noção de "enumeravelmente infinito" pelo menos não na semântica dos modelos. (Veja o verbete sobre lógica de segunda ordem e

sobre lógica de ordem superior.)

Seja A qualquer conjunto de sentenças em uma linguagem de primeira ordem $L1K=$, onde K inclui a terminologia para aritmética, e assuma que todo membro de A é verdadeiro para os números naturais. Podemos até tomar A como sendo o conjunto de todas as sentenças em $L1K=$ que são verdadeiras sobre os números naturais. Então A tem incontáveis modelos, na verdade modelos de qualquer cardinalidade infinita. Tais interpretações estão entre aqueles que às vezes são chamados modelos aritméticos *não pretendidos* ou *não clássicos*. Seja B qualquer conjunto de sentenças de primeira ordem que sejam verdadeiras para os números reais, e seja C qualquer axiomatização de primeira ordem da teoria dos conjuntos. Então, se B e C são satisfatíveis (em infinitas interpretações), então cada um deles tem modelos enumeravelmente infinitos. Ou seja, qualquer teoria dos conjuntos dos números reais ou teoria de primeira ordem satisfatível tem modelos (não pretendidos), na quantidade dos números naturais. Isso ocorre apesar do fato de que uma sentença que (aparentemente) afirma que o universo é incontável e demonstrável na maioria das teorias de conjuntos. Essa situação, conhecida como *paradoxo de Skolem-Hull*, gerou muita discussão, mas devemos remeter o leitor a outro lugar, para uma introdução sobre ele (veja o verbete sobre o paradoxo de Skolem-Hull e Shapiro, 1996).

6. A Única Lógica Certa?

Lógica e raciocínio andam de mãos dadas. Dizemos que alguém raciocinou pobremente sobre algo, se não raciocinou logicamente, ou que um argumento é ruim porque ele não é logicamente válido. Até hoje, pesquisa tem sido dedicada exatamente a quais tipos de sistemas lógicos são apropriados para orientar nosso raciocínio. Tradicionalmente, a lógica clássica tem sido a lógica sugerida como a ideal para guiar o raciocínio (por exemplo, veja Quine [1986], Resnik [1996] ou Rumfitt [2015]). Por esta razão, a lógica clássica tem sido frequentemente chamada de "a lógica certa". Veja Priest [2006a] para uma descrição de como ser a melhor lógica para guiar o raciocínio poder fazer de uma lógica a lógica certa.

Que a lógica clássica tem sido dada como a resposta para qual lógica deve guiar o raciocínio, isso não é inesperado. Ela tem regras que são mais ou

menos intuitivas, e é surpreendentemente simples pelo quão forte ela é. Além disso, ela é ao mesmo tempo correta e completa, o que é um bônus adicional. Existem alguns problemas, no entanto. Conforme indicado na seção 5, existem certas limitações expressivas à lógica clássica. Assim, muita literatura foi escrita desafiando este status quo. Esta literatura em geral deriva de três posições. A primeira é que a lógica não é orientadora de raciocínio, porque alguma outra lógica específica o é. Exemplos desse tipo de argumento podem ser encontrados em Brouwer [1949], Heyting [1956] e Dummett [2000], que argumentam que a lógica intuicionista é correta, e Anderson e Belnap [1975], que argumentam que a lógica da relevância é correta, entre muitos outros. Além disso, algumas pessoas propõem uma extensão da lógica clássica que possa expressar a noção de “enumeravelmente infinito” (veja Shapiro [1991]). A segunda objeção à afirmação de que a lógica clássica é a lógica certa vem de uma perspectiva diferente: os pluralistas lógicos afirmam que a lógica clássica não é a única lógica certa, porque há mais de uma lógica certa. Veja Beall e Restall [2006] e Shapiro [2014] para exemplos desse tipo de visão (veja também o verbete sobre pluralismo lógico). Finalmente, a última objeção à alegação de que a lógica clássica é a lógica certa é que a(s) lógica(s) não é um guia para o raciocínio, e portanto, não há uma lógica certa.

É suficiente dizer que, embora a lógica clássica tenha sido tradicionalmente considerada “a lógica certa”, isso não é aceito por todos. Uma característica interessante desses debates, porém, é que eles demonstram claramente os pontos fortes e fracos de várias lógicas (incluindo a lógica clássica) quando se trata de capturar o raciocínio.

Referências

- Anderson, A. & N. Belnap [1975]. *Entailment: The logic of relevance and necessity I*. Princeton: Princeton University Press.
- Anderson, A. & N. Belnap, & M. Dunn [1992]. *Entailment: The logic of relevance and necessity II*. Princeton: Princeton University Press.
- Beall, Jc and G. Restall [2006]. *Logical Pluralism*. Oxford: Oxford University Press.

- Brouwer, L.E.J. [1949], "Consciousness, Philosophy and Mathematics". *Journal of Symbolic Logic*, 14(2): 132–133.
- Cook, R. [2002]. "Vagueness and mathematical precision". *Mind*, 111: 227–247.
- Corcoran, J. [1973]. "Gaps between logical theory and mathematical practice". *The methodological unity of Science*. Ed. M. Bunge, Dordrecht: D. Reidel, 23–50.
- Davidson, D. [1984]. *Inquiries into truth and interpretation*, Oxford: Clarendon Press.
- Dummett, M. [2000]. *Elements of intuitionism*. 2^a Ed., Oxford: Oxford University Press.
- Gödel, K. [1930], "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls". *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, 349–360; traduzido como "The completeness of the axioms of the functional calculus of logic". In van Heijenoort [1967], 582–591.
- Heyting, A. [1956]. *Intuitionism*. Amsterdam: North-Holland Publishing.
- Lycan, W. [1984]. *Logical form in natural language*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Montague, R. [1974]. *Formal philosophy*. Ed. R. Thomason. New Haven: Yale University Press.
- Priest, G. [2006]. *In contradiction, a study of the transconsistent*. 2^a Ed. rev. Oxford: Clarendon Press.
- [2006a], *Doubt truth to be a liar*, Oxford: Clarendon Press.
- Quine, W. V. O. [1960], *Word and object*, Cambridge, MA: The MIT Press.
- [1986], *Philosophy of logic*, 2^a Ed, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Resnik, M. [1996], "Ought there to be but one true logic", sobre *Logic and Reality: Essays on the Legacy of Arthur Prior*, J. Copeland (ed.), Oxford: Oxford University Press, 489-517.
- Rumfitt, I. [2015], *The Boundary Stones of Thought: An Essay in the Philosophy of Logic*, Oxford: Oxford University Press.
- Shapiro, S. [1991], *Foundations without Foundationalism*, Oxford: Clarendon Press.
- [1996], *The limits of logic: Second-order logic and the Skolem paradox*, *The international research library of philosophy*, Dartmouth Publishing Company, 1996. (Uma antologia contendo muitos dos documentos posteriores significativos sobre o paradoxo de Skolem.)

- [1998], “Logical consequence: models and modality”, sobre *The philosophy of mathematics today*, editado por M. Schirn, Oxford: Oxford University Press, 131-156.
- [2014], *Varieties of Logic*, Oxford: Oxford University Press.
- Tennant, N. [1997], *The taming of the true*, Oxford: Clarendon Press.
- Van Heijenoort, J [1967], *From Frege to Gödel*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. Uma antologia contendo muitos dos principais documentos históricos sobre lógica matemática nas primeiras décadas do século XX.

Leitura Adicional

Há muitos livros didáticos bons sobre lógica matemática. A seguir, uma amostra.

- Boolos, G., J. P. Burgess, e R. Jeffrey [2007], *Computability and logic*, 5ª Edição, Cambridge, England: Cambridge University Press. Nível elementar e intermediário.
- Bergmann, M., J. Moor and J. Nelson [2013], *The logic book*, 6ª Ed., New York: McGraw-Hill. Nível elementar e intermediário.
- Church, A. [1956], *Introduction to mathematical logic*, Princeton: Princeton University Press. Livro Clássico.
- Enderton, H. [1972], *A mathematical introduction to logic*, New York: Academic Press. Livro didático sobre lógica matemática, destinada a um público matemático.
- Forbes, G. [1994], *Modern Logic*, Oxford: Oxford University Press. Livro didático elementar.
- Mendelson, E. [1987], *Introduction to mathematical logic*, 3ª Ed., Princeton: van Nostrand. Intermediário.

(III) Lógica Modal*

Autor: James Garson

Tradução: Heitor Hedler Siqueira Campos

Revisão: Márcio Moretto Ribeiro & João Marcos

Um modal é uma expressão (como 'necessariamente' ou possivelmente') que é usada para qualificar a verdade de um juízo. A lógica modal é, estritamente falando, o estudo do comportamento dedutivo das expressões 'é necessário que' e 'é possível que'. Entretanto, o termo 'lógica modal' pode ser usado de forma mais abrangente para uma família de sistemas similares. Estes incluem lógicas doxásticas, lógicas para expressões temporais, lógicas para expressões deonticas (morais) tais como 'é obrigatório que' e 'é permitido que', e muitas outras. O entendimento das lógicas modais é particularmente valioso na análise formal do argumento filosófico, onde expressões da família modal são tanto comuns quanto ambíguas. A lógica modal também possui importantes aplicações na ciência da computação.

* Tradução do verbete "Modal Logic" de James Garson publicado pela *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Edição da Primavera de 2013), edição de Edward N. Zalta, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/logic-modal/>>. Publicado com a autorização do editor Prof. Dr. Edward Zalta. Tradução primeiramente publicada em: *Investigação Filosófica*: vol. 5, n. 2, 2014. Disponível em: <https://periodicos.unifap.br/index.php/investigacao_filosofica/article/view/4897>.

The following is the translation of the entry on Modal Logic by James Garson, in the Stanford Encyclopedia of Philosophy. The translation follows the version of the entry in the SEP's archives at <https://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/logic-modal/>. This translated version may differ from the current version of the entry, which may have been updated since the time of this translation. The current version is located at <https://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/>. We'd like to thank the Editors of the Stanford Encyclopedia of Philosophy, mainly Prof. Dr. Edward Zalta, for granting permission to translate and to publish this entry.

1. O que é a Lógica Modal?

Interpretada de forma estrita, a lógica modal estuda o raciocínio que envolve o uso das expressões 'necessariamente' e 'possivelmente'. Entretanto, o termo 'lógica modal' é usado de forma mais abrangente para cobrir uma família de lógicas que possuem regras similares e uma diversidade de símbolos diferentes.

Segue uma lista descrevendo as lógicas mais conhecidas desta família.

Lógica	Símbolos	Expressões Simbolizadas
Lógica Modal	\Box	É necessário que...
	\Diamond	É possível que...
Lógica Deôntica	O	É obrigatório que...
	P	É permitido que....
	F	É proibido que...
Lógica Temporal	G	Será sempre o caso que...
	F	Será o caso que...
	H	Sempre foi o caso que...
	P	Foi o caso que...
Lógica Doxástica	Bx	x acredita que...

2. Lógicas Modais

As lógicas mais conhecidas na família modal são construídas a partir de uma lógica mais fraca **K** (em homenagem a Saul Kripke). Na leitura mais estrita, a lógica modal se preocupa com a possibilidade e a necessidade. Uma diversidade de símbolos diferentes pode ser desenvolvida para tais lógicas utilizando **K** como fundamento. Os símbolos de **K** incluem ' \sim ' para 'não', ' \rightarrow ' para 'se...então', e ' \Box ' para o operador modal 'é necessário que'. (Os conectivos '&', 'V' e ' \leftrightarrow ' podem ser definidos a partir de ' \sim ' e ' \rightarrow ' como na lógica proposicional.) **K** resulta da adição

aos princípios da lógica proposicional o seguinte.

Regra da Necessitação: Se A é um teorema de \mathbf{K} , então $\Box A$ também o é.

Axioma de Distribuição: $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

(Nesses princípios utilizamos ' A ' e ' B ' como metavariáveis sobre fórmulas da linguagem.) De acordo com a Regra da Necessitação, qualquer teorema da lógica é necessário. O Axioma da Distribuição diz que se é necessário que se A então B , então se necessariamente A então necessariamente B .

O operador \Diamond (para 'possivelmente') pode ser definido a partir de \Box tomando $\Diamond A = \sim\Box\sim A$. Em \mathbf{K} , os operadores \Box e \Diamond comportam-se de forma muito semelhante aos quantificadores \forall (todo) e \exists (algum). Por exemplo, a definição de \Diamond a partir de \Box reflete a equivalência de $\forall xA$ com $\sim\exists x\sim A$ na lógica de predicados. Por conseguinte, $\Box(A\&B)$ implica $\Box A\&\Box B$ e vice-versa; enquanto $\Box A\vee\Box B$ implica $\Box(A\vee B)$, mas *não* vice-versa. Isso reflete os padrões exibidos pelo quantificador universal: $\forall x(A\&B)$ implica $\forall xA\&\forall xB$ e vice-versa, enquanto $\forall xA\vee\forall xB$ implica $\forall x(A\vee B)$ mas não vice-versa. Paralelos similares entre \Diamond e \exists podem ser traçados. A base para essa correspondência entre os operadores modais e os quantificadores irá emergir mais claramente na seção sobre Semântica de Mundos Possíveis.

O sistema \mathbf{K} é muito fraco para prover uma explicação adequada da necessidade. O seguinte axioma não é demonstrável em \mathbf{K} , mas é claramente desejável.

(M) $\Box A \rightarrow A$

(M) enuncia que o que quer que seja necessário é o caso. Note que (M) seria incorreto se \Box fosse lido 'deve ser o caso que' ou 'era o caso que'. Então a presença do axioma (M) distingue a lógica modal correspondente de outras lógicas na família modal. Uma lógica modal M resulta da adição de (M) a \mathbf{K} . (Alguns autores chamam esse sistema de \mathbf{T} .)

Muitos lógicos acreditam que M ainda é fraca demais para formalizar corretamente a lógica da necessidade e da possibilidade. Eles recomendam ulteriores axiomas para governar a iteração, ou repetição, dos operadores modais. Seguem os dois mais famosos axiomas de iteração:

(4) $\Box A \rightarrow \Box\Box A$

(5) $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

S4 é o sistema que resulta de adicionar (4) a M . De forma similar, **S5** é M adicionado de (5). Em **S4**, a sentença $\Box\Box A$ é equivalente a $\Box A$. Como resultado, qualquer cadeia de quadrados pode ser substituída por um único quadrado, e o mesmo ocorre para cadeias de losangos. Isso equivale à ideia de que a iteração de operadores modais é supérflua. Dizer que A é necessariamente necessário é considerada uma maneira inutilmente longa de dizer que A é necessário. O sistema **S5** possui princípios ainda mais fortes para simplificar cadeias de operadores modais. Em **S4**, uma cadeia de operadores *do mesmo tipo* pode ser substituída por aquele operador; em **S5**, cadeias contendo tanto quadrados quanto losangos são equivalentes ao último operador na cadeia. Assim, por exemplo, dizer que é possível que A seja necessário é o mesmo que dizer que A é necessário. Segue um sumário dessas características de **S4** e **S5**.

S4: $\Box\Box\dots\Box = \Box$ e $\Diamond\dots\Diamond = \Diamond$

S5: $00\dots\Box = \Box$ e $00\dots\Diamond = \Diamond$, onde cada 0 é um \Box ou um \Diamond

Pode-se se engajar em infundáveis discussões sobre a correção ou incorreção desses e outros princípios de iteração para \Box e \Diamond . A controvérsia pode ser parcialmente resolvida pelo reconhecimento de que as palavras 'necessariamente' e 'possivelmente' possuem muitos usos diferentes. Então, a aceitabilidade dos axiomas da lógica modal depende de quais desses usos temos em mente. Por esse motivo, não há uma lógica modal, mas ao invés disso uma família inteira de sistemas construídos a partir de M . O relacionamento entre esses sistemas é diagramado na Seção 8, e sua aplicação a diferentes usos de 'necessariamente' e 'possivelmente' podem ser mais profundamente entendida estudando sua semântica de mundos possíveis na Seção 6.

O sistema **B** (em homenagem ao lógico Brouwer) é formado adicionando o axioma (B) a M .

(B) $A \rightarrow \Box\Diamond A$

É interessante notar que **S5** pode ser formulado de forma equivalente adicionando (B) a **S4**. O axioma (B) levanta um ponto importante sobre a interpretação das fórmulas modais. (B) diz que se A é o caso, então A é necessariamente possível. Pode-se sustentar que (B) deveria sempre ser adotado em qualquer lógica modal, pois certamente se A é o caso, então é necessário que A seja possível. Entretanto, há um problema com essa assertiva que pode ser exposto notando que $\Diamond\Box A \rightarrow A$ é demonstrável a partir de (B). Então $\Diamond\Box A \rightarrow A$ deveria ser aceitável se (B) o for. Todavia, $\Diamond\Box A \rightarrow A$ diz que se A é possivelmente

necessário, então A é o caso, e isso está longe de ser óbvio. Por que (B) parece óbvio, enquanto uma de suas consequências parece não ser realmente óbvia? A resposta é que há uma ambiguidade perigosa na interpretação em português de $A \rightarrow \Box \Diamond A$. Frequentemente utilizamos a expressão 'Se A então necessariamente B ' para expressar que o condicional 'se A então B ' é necessário. Essa interpretação corresponde a $\Box(A \rightarrow B)$. Em outras ocasiões, queremos dizer que se A , então B é necessário: $A \rightarrow \Box B$. Em português, 'necessariamente' é um advérbio, e já que advérbios são usualmente empregados próximos a verbos, não possuímos nenhuma maneira natural de indicar se o operador modal se aplica a todo o condicional, ou a seu consequente. Por tais motivos, há uma tendência de confundir (B) : $A \rightarrow \Box \Diamond A$ com $\Box(A \rightarrow \Diamond A)$. Mas $\Box(A \rightarrow \Diamond A)$ não é o mesmo que (B) , pois $\Box(A \rightarrow \Diamond A)$ já é um teorema de M , enquanto (B) não o é. É preciso tomar um cuidado especial para que nossa reação positiva a $\Box(A \rightarrow \Diamond A)$ não afete nossa avaliação de (B) . Uma maneira simples de nos protegermos é formular B de maneira equivalente utilizando o axioma $\Diamond \Box A \rightarrow A$, onde essas ambiguidades de escopo não aparecem.

3. Lógicas Deonticas

As lógicas deonticas introduzem o símbolo primitivo O para 'é obrigatório que', a partir do qual os símbolos P para 'é permitido que' e F para 'é proibido que' são definidos: $PA = \sim O\sim A$ e $FA = O\sim A$. O análogo deontico do axioma modal (M) : $OA \rightarrow A$ é claramente não apropriado para a lógica deontica. (Infelizmente, o que deve ser nem sempre é o caso). Entretanto, um sistema básico D de lógica deontica pode ser interpretado adicionando o axioma mais fraco (D) a K .

$(D) OA \rightarrow PA$

O axioma (D) garante a consistência do sistema de obrigações insistindo que quando A é obrigatório, A é permissível. Um sistema que nos obriga a A , mas não nos permite fazê-lo, coloca-nos numa situação difícil. Apesar do fato de que alguns sustentarão que tais conflitos de obrigação são ao menos possíveis, a maioria dos lógicos deonticos aceita (D) .

$O(OA \rightarrow A)$ é outro axioma deontico que parece desejável. Apesar de ser equivocado dizer que se A é obrigatório então A é o caso $(OA \rightarrow A)$, ainda

assim, essa condicional *deveria* ser o caso. Alguns lógicos deônticos acreditam que *D* precisa ser suplementado com $O(OA \rightarrow A)$ também.

A controvérsia a respeito da iteração (repetição) de operadores surge novamente na lógica deôntica. Em algumas concepções de obrigação, *OOA* coincide com *OA*. 'deve ser o caso que deve ser o caso' é tratado como uma espécie de repetição desnecessária, os 'deve's adicionais não adicionam nada de novo. Axiomas então são adicionados para garantir a equivalência entre *OOA* e *OA*. A política de iteração mais abrangente incorporada em **S5** também pode ser adotada. Entretanto, há concepções de obrigação nas quais a distinção entre *OA* e *OOA* é preservada. A ideia é de que há diferença genuína entre as obrigações que nós *realmente* temos e as obrigações que nós *deveríamos* adotar. Então, por exemplo, 'deve ser o caso que deve ser o caso que *A*' comanda a adoção de alguma obrigação que pode não estar de fato estabelecida, resultando no fato de que *OOA* pode ser verdadeiro mesmo quando *OA* é falso.

4. Lógicas Temporais

Na lógica temporal, há dois operadores básicos, *G* para o futuro, e *H* para o passado. *G* é lido 'será sempre o caso que' e o operador definido *F* (lido 'será o caso que') pode ser introduzido por $FA = \sim G\sim A$. De forma similar *H* é lido: 'sempre será o caso que' e *P* (para 'foi o caso que') é definido por $PA = \sim H\sim A$. Um sistema básico para lógica temporal chamado **Kt** resulta de adotar os princípios de **K** tanto para *G* quanto *H*, juntamente a dois axiomas para governar a interação entre os operadores do passado e do futuro:

Regras de "Necessitação":

Se *A* é um teorema então *GA* e *HÁ* também o são.

Axiomas de Distribuição:

$G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$ e $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$

Axiomas de Interação:

$A \rightarrow GPA$ e $A \rightarrow HFA$

Os axiomas de interação levantam questões a respeito das assimetrias entre o passado e o futuro. Uma intuição padrão é a de que o passado está fixo, enquanto o futuro ainda está em aberto. O primeiro axioma de interação ($A \rightarrow GPA$) está em conformidade com essa intuição em relatar que o que é o caso

agora (A), irá em todos os tempos futuros, estar no passado (GPA). Entretanto, $A \rightarrow HFA$ pode parecer possuir caráter inaceitavelmente determinista, pois afirma, aparentemente, que o que é verdade agora (A) sempre foi de tal forma que irá ocorrer no futuro (HFA). Entretanto, a semântica de mundos possíveis para a lógica temporal revela que essa preocupação resulta de uma simples confusão, e que os dois axiomas de interação são igualmente aceitáveis.

Note que o axioma característico da lógica modal, (M): $\Box A \rightarrow A$, não é aceitável nem para H nem para G , já que A não se segue de 'sempre foi o caso que A ', nem de 'sempre será o caso que A '. Entretanto, é aceitável numa lógica temporal aparentada na qual G é lido como 'é e sempre será o caso que', e H é lido como 'é e sempre foi o caso que'.

Dependendo de quais suposições são feitas a respeito da estrutura do tempo, axiomas ulteriores precisam ser adicionados às lógicas temporais. Segue-se uma lista de axiomas comumente adotados nas lógicas temporais. Uma explicação de como eles dependem da estrutura do tempo será encontrada na seção Semântica de Mundos Possíveis.

$GA \rightarrow GGA$ e $HA \rightarrow HHA$

$GGA \rightarrow GA$ e $HHA \rightarrow HA$

$GA \rightarrow HA$ e $HA \rightarrow PA$

É interessante notar que certas combinações de operadores de passado e futuro podem ser utilizadas para expressar sentenças complexas na língua portuguesa. Por exemplo, FPA corresponde à sentença A no futuro do presente composto do indicativo, (como em 'daqui a 20 segundos a iluminação terá mudado'). Similarmente, PPA expressa o pretérito-mais-que-perfeito.

5. Lógicas Condicionais

O fundador da lógica modal, C. I. Lewis, definiu uma série de lógicas modais que não possuíam \Box como símbolo primitivo. Lewis estava ocupado em desenvolver uma lógica dos condicionais que estivesse livre dos chamados Paradoxos da Implicação Material, a saber os teoremas clássicos $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$ e $B \rightarrow (A \rightarrow B)$. Ele introduziu o símbolo \rightarrow para "implicação estrita" e desenvolveu lógicas onde nem $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$ nem $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ são demonstráveis. A prática moderna tem sido a de definir $A \rightarrow B$ como $\Box(A \rightarrow B)$, e usar as lógicas

modais governando \square para obter resultados similares. Entretanto, a demonstrabilidade de fórmulas tais como $(A \& \sim A) \rightarrow B$ em tais lógicas parece ir de encontro à preocupação com os paradoxos. Anderson e Belnap (1975) desenvolveram os sistemas **R** e **E** (para Lógica Relevante) que foram desenvolvidas para superar tais dificuldades. Esses sistemas requerem a revisão dos sistemas padrão de lógica proposicional. (Para uma discussão mais detalhada da Lógica de Relevância, veja o verbete Lógica Relevante).

David Lewis (1973) desenvolveu lógicas condicionais especiais para lidar com expressões contrafatuais, isso é, expressões da forma 'se A acontecesse, então B aconteceria'. (Kvart (1980) é outro ótimo recurso sobre o tópico). Lógicas contrafatuais diferem daquelas baseadas na implicação estrita porque as primeiras rejeitam enquanto as últimas aceitam a contraposição.

6. Semântica de Mundos Possíveis

O propósito da lógica é caracterizar a diferença entre argumentos válidos e argumentos inválidos. Um sistema lógico para uma linguagem é um conjunto de axiomas e regras designado para demonstrar *exatamente* os argumentos válidos enunciáveis na linguagem. Criar tal lógica pode ser uma tarefa difícil. O lógico precisa ter certeza de que o sistema é *correto*, isto é, que cada argumento demonstrado utilizando as regras e axiomas é de fato válido. Além disso, o sistema precisa ser *completo*, isto é, cada argumento válido deve possuir uma demonstração no sistema. Verificar a correção e completude de sistemas formais é uma preocupação central dos lógicos.

Tal verificação não pode ser realizada até que o conceito de validade seja definido rigorosamente. As semânticas formais para uma lógica fornecem uma definição de validade caracterizando o comportamento da verdade das sentenças do sistema. Na lógica proposicional, a validade pode ser definida utilizando tabelas de verdade. Um argumento válido é simplesmente um argumento em que cada linha da tabela de verdade que torna suas premissas verdadeiras também torna sua conclusão verdadeira. Entretanto, tabelas de verdade não podem ser utilizadas para fornecer uma explicação da validade nas lógicas modais porque não há tabelas de verdade para expressões como 'é necessário que', 'é obrigatório que', e similares. (O problema é que o valor de verdade de *A* não determina o valor

de verdade de $\Box A$. Por exemplo, quando A é 'Cães são cães', $\Box A$ é verdadeira, mas quando A é 'Cães são animais de estimação', $\Box A$ é falsa.) Não obstante, semânticas para lógicas modais podem ser definidas introduzindo mundos possíveis. Iremos ilustrar a semântica de mundos possíveis para uma lógica da necessidade contendo os símbolos \sim , \rightarrow e \Box . Em seguida iremos explicar como a mesma estratégia pode ser adaptada para outras lógicas da família modal.

Na lógica proposicional, uma valoração para sentenças atômicas (ou uma linha na tabela de verdade) atribui um valor de verdade (V ou F) para cada variável proposicional p . Daí os valores de verdade das sentenças complexas são calculados com tabelas de verdade. Nas semânticas modais, um conjunto M de mundos possíveis é introduzido. Uma valoração então dá um valor de verdade para cada variável proposicional *em cada mundo possível* de M . Isso quer dizer que o valor atribuído a p para o mundo m pode diferir do valor atribuído a p para outro mundo m' .

O valor de verdade da sentença atômica p no mundo m dado pela valoração v pode ser escrito como $v(p,m)$. Dada esta notação, os valores de verdade (V para verdadeiro, F para falso) de sentenças complexas da lógica modal para uma dada valoração v (e o membro m do conjunto de mundos M) pode ser definida pelas seguintes cláusulas de verdade. ('sse' abrevia 'se somente se'.)

$$(\sim) v(\sim A, m) = V \text{ sse } v(A, m) = F.$$

$$(\rightarrow) v(A \rightarrow B, m) = V \text{ sse } v(A, m) = F \text{ ou } v(B, m) = V.$$

$$(5) v(\Box A, m) = V \text{ sse para cada mundo } m' \text{ em } M, v(A, m') = V.$$

As cláusulas (\sim) e (\rightarrow) simplesmente descrevem o comportamento padrão da tabela de verdade para a negação e a implicação material, respectivamente. De acordo com (5), $\Box A$ é verdadeiro (em um mundo m) exatamente quando A é verdadeiro em *todos* os mundos possíveis. Dada a definição de \Diamond , (a saber, $\Diamond A = \sim \Box \sim A$) a condição de verdade (5) garante que $\Diamond A$ é verdadeiro no caso de A ser verdadeiro em *algum* mundo possível. Já que as cláusulas de verdade para \Box e \Diamond envolvem os quantificadores 'todo' e 'algum' (respectivamente), os paralelos entre o comportamento lógico entre \Box e $\forall x$, e entre \Diamond e $\exists x$ ressaltados na Seção 2, são esperados.

As cláusulas (\sim) , (\rightarrow) e (5) nos permitem calcular o valor de verdade de qualquer sentença em qualquer mundo possível numa dada valoração. Uma definição de validade está agora muito próxima. Um argumento é *5-válido para um dado conjunto W* (de mundos possíveis) se e somente se cada valoração das

sentenças atômicas que atribui V às premissas num mundo em M também atribuem V à conclusão no mesmo mundo. Um argumento é dito *5-válido* sse é válido para cada conjunto não-vazio M de mundos possíveis.

Mostrou-se que **S5** é correto e completo para *5-validade* (por isso nosso uso do símbolo '5'). Os argumentos 5-válidos são exatamente os argumentos demonstráveis em **S5**. Esse resultado sugere que **S5** é a forma correta de formular uma lógica da necessidade.

Entretanto, **S5** não é uma lógica razoável para todos os membros da família modal. Na lógica deôntica, na lógica temporal, e outras, o análogo da condição de verdade (5) claramente não é apropriado; além disso há até mesmo outras concepções de necessidade para as quais (5) também deveria ser rejeitada. O ponto é mais fácil de entender no caso da lógica temporal. Aqui, os membros de M são momentos do tempo, ou mundos “congelados”, por assim dizer, em um instante. Por questões de simplicidade vamos considerar uma lógica temporal *do futuro*, uma lógica onde $\Box A$ é lido 'será sempre o caso que'. (Formulamos o sistema usando \Box ao invés do tradicional G para que as conexões com outras lógicas modais sejam mais facilmente apreciadas.) A cláusula correta para \Box deveria dizer que $\Box A$ é verdadeira no momento m sse A é verdadeiro em todos os momentos *no futuro de m* . Para restringir a atenção ao futuro, a relação R (precedência temporal) precisa ser introduzida. Assim, a cláusula correta pode ser formulada como se segue.

(K) $v(\Box A, m) = V$ sse para cada m' , se mRm' , então $v(A, m') = V$.

Isso diz que $\Box A$ é verdadeira em m somente no caso de A ser verdadeira em todos os momentos *depois de m* .

A validade para este tipo de lógica temporal pode agora ser definida. Um *enquadramento* $\langle M, R \rangle$ é um par consistindo de um conjunto não-vazio M (de mundos) e uma relação binária R em M . Um *modelo* $\langle E, v \rangle$ consiste num *enquadramento* E , e uma *valoração* v que atribui valores de verdade a cada sentença atômica em cada mundo de M . Dado um modelo, os valores de todas as sentenças complexas podem ser determinados utilizando (\neg), (\rightarrow) e (K). Um argumento é **K-válido** caso cada valoração das sentenças atômicas que atribui V às premissas num mundo também atribui V à conclusão no mesmo mundo. Como o leitor pode ter adivinhado a partir do nosso uso de 'K', mostrou-se que a lógica modal mais simples **K** é tanto correta quanto completa para **K-validade**.

7. Axiomas Modais e Condições sobre Enquadramentos

Pode-se assumir nesta discussão que **K** é a lógica correta quando o \Box é lido como ‘será sempre o caso que’. Entretanto, há razões para pensar que **K** seja fraca demais. Uma característica lógica óbvia da relação R (precedência temporal) é a transitividade. Se wRv (w precede temporalmente v) e vRu (v precede temporalmente u), então se segue que wRu (w precede temporalmente u). Vamos definir então um novo tipo de validade que corresponde a essa condição sobre R . Seja um *4-modelo* qualquer modelo cujo enquadramento $\langle M, R \rangle$ é tal que R é uma relação transitiva em M . Então um argumento é *4-válido* sse todo *4-modelo* cuja valoração atribui V às premissas em um mundo também atribui V à conclusão no mesmo mundo. Usamos ‘4’ para descrever tal modelo transitivo porque a lógica que é adequada (tanto correta quanto completa) para *4*-validade é **K4**, a lógica que resulta da adição do axioma (4): $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ a **K**.

A transitividade não é a única propriedade que poderíamos querer exigir do enquadramento $\langle M, R \rangle$ se R é lido como ‘precedência temporal’ e M é um conjunto de momentos. Uma condição (que é apenas levemente controversa) é que não há um último momento no tempo, i.e. para cada mundo m há algum mundo n tal que mRn . Essa condição sobre os enquadramentos é chamada *serialidade*. A serialidade corresponde ao axioma (D): $\Box A \rightarrow \Diamond A$, da mesma maneira que a transitividade corresponde a (4). Um **D**-modelo é um **K**modelo com um enquadramento serial. A partir do conceito de **D**-modelo a noção correspondente de **D**-validade pode ser definida, exatamente como fizemos no caso da *4*-validade. Como você provavelmente adivinhou, o sistema que é adequado com relação à **D**validade é **KD**, ou **K** adicionado de (D). Não apenas isso, mas o sistema **KD4** (isso é, **K** adicionado de (4) e (D)) é adequado a respeito da **D4**-validade, onde um **D4**-modelo é um modelo no qual $\langle M, R \rangle$ é serial e transitivo.

Outra propriedade que poderíamos desejar na relação de precedência temporal é a densidade, a condição que diz que entre dois momentos quaisquer, podemos sempre encontrar outro. A densidade seria falsa se o tempo fosse atômico, isto é, se houvesse intervalos de tempo que não pudessem ser divididos em partes menores. A densidade corresponde ao axioma (C4): $\Box \Box A \rightarrow \Box A$, a recíproca de (4). Então, por exemplo, o sistema **KC4**, o qual corresponde a **K** adicionado de (C4), é adequado com relação aos modelos cujo enquadramento

$\langle M, R \rangle$ é denso, e **KDC4**, adequado a respeito dos modelos cujos enquadramentos são seriais e densos, e assim por diante.

Cada um dos axiomas da lógica modal que discutimos anteriormente corresponde da mesma maneira a uma condição sobre os enquadramentos. O relacionamento entre condições sobre os enquadramentos e os axiomas correspondentes é um dos tópicos centrais no estudo das lógicas modais. Uma vez que a interpretação do operador intensional \Box foi decidida, as condições apropriadas sobre R podem ser determinadas para se ajustarem às correspondentes noções de validade. Por sua vez, isto nos permite selecionar o conjunto certo de axiomas para aquela lógica.

Por exemplo, considere uma lógica deôntica, na qual \Box é lido como 'é obrigatório que'. Aqui a verdade de $\Box A$ não requer a verdade de A em *todos* os mundos possíveis, mas apenas num subconjunto desses mundos onde as pessoas fazem o que devem. Então também desejaremos introduzir a relação R para este tipo de lógica, e iremos utilizar a cláusula de verdade (K) para avaliar $\Box A$ em um mundo. Entretanto, nesse caso, R não é 'precedência temporal'. Ao invés disso, mRm' vale caso o mundo m' seja uma variante moralmente aceitável de m , isto é, um mundo no qual nossas ações podem realizar o que é moralmente correto, ou certo, ou justo. Sob tal leitura, seria para ficar claro que os enquadramentos relevantes deveriam obedecer à serialidade, a condição que requer que cada mundo possível possua uma variante moralmente aceitável. A análise das propriedades desejadas para R torna claro que uma lógica deôntica básica pode ser formulada adicionando o axioma (D) a **K**.

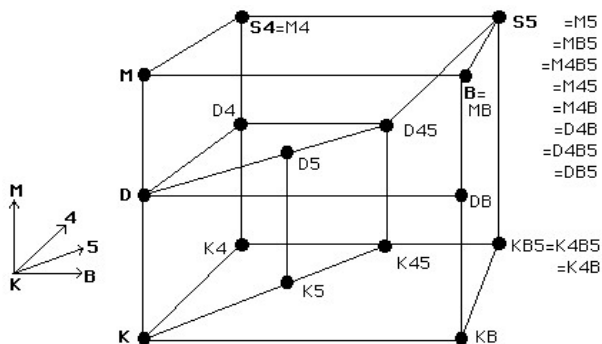
Mesmo na lógica modal, pode-se desejar restringir o leque de mundos possíveis que são relevantes para determinar se $\Box A$ é verdadeiro num dado mundo. Por exemplo, posso dizer que é necessário para mim pagar minhas contas, mesmo que eu saiba perfeitamente que há um mundo possível no qual eu falho em pagá-las. No discurso ordinário, a assertiva de que A é necessário não requer a verdade de A em *todos* os mundos possíveis, mas apenas numa subclasse de mundos que eu tenho em mente (por exemplo, mundos onde evito as sanções por falhar em pagar as contas). Para fornecer um tratamento genérico da necessidade, precisamos dizer que $\Box A$ é verdadeira em m sse A é verdadeira em todos os mundos que *estão relacionados* a m da maneira adequada. Assim, para um operador \Box interpretado como necessidade, introduzimos a correspondente relação R no conjunto de mundos possíveis M , tradicionalmente

chamada relação de acessibilidade. A relação de acessibilidade R vale entre os mundos m e m' sse m' é possível dados os fatos de m . Sob essa leitura de R , deve ficar claro que enquadramentos para lógicas modais deveriam ser reflexivos. Segue-se que as lógicas modais deveriam ser fundamentadas em **M**, o sistema que é resultado da adição de (M) a **K**. Dependendo de como a relação de acessibilidade é entendida, a simetria e a transitividade também podem ser desejáveis.

Uma lista de algumas das mais comumente discutidas condições sobre os enquadramentos e seus correspondentes axiomas, juntamente com um mapa mostrando a relação entre as várias lógicas modais pode ser encontrada na próxima seção.

8. Mapa das relações entre lógicas modais

O seguinte diagrama mostra o relacionamento entre as lógicas modais mais bem conhecidas, a saber as lógicas que podem ser formadas adicionando alguma combinação dos axiomas (D) , (M) , (4) , (B) e (S) a **K**. Uma lista desses (e outros) axiomas, e das correspondentes condições sobre enquadramentos pode ser encontrada abaixo do diagrama.



Neste diagrama, os sistemas são dados pela lista de seus axiomas. Assim, por exemplo, **M4B** é o resultado de adicionar (M) , (4) e (B) a **K**. Em negrito, indicamos os nomes tradicionais de alguns desses sistemas. Quando o sistema **S** aparece abaixo e/ou à esquerda de **S'** conectado por uma linha, então **S'** é uma

extensão de **S**. Isso significa que cada argumento demonstrável em **S** é demonstrável em **S'**, mas **S** é mais fraco que **S'**, i.e. nem todos os argumentos demonstráveis em **S'** são demonstráveis em **S**.

A lista a seguir indica os axiomas, seus nomes, e as correspondentes condições sobre a relação de acessibilidade *R* para os axiomas até agora discutidos neste verbete da enciclopédia.

Nome	Axioma	Condição sobre os Enquadramentos	R é...
(D)	$\Box A \rightarrow \Diamond A$	$\exists u mRo$	Serial
(M)	$\Box A \rightarrow A$	mRm	Reflexiva
(4)	$\Box A \rightarrow \Box \Box A$	$(mRn \& nRo) \Rightarrow mRo$	Transitiva
(B)	$A \rightarrow \Box \Diamond A$	$mRn \Rightarrow nRm$	Simétrica
(5)	$\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$	$(mRn \& mRo) \Rightarrow nRo$	Euclidiana
(CD)	$\Diamond A \rightarrow \Box A$	$(mRn \& mRo) \Rightarrow n=o$	Funcional
($\Box M$)	$\Box(\Box A \rightarrow A)$	$mRn \Rightarrow nRn$	Reflexiva Deslocada
(C4)	$\Box \Box A \rightarrow \Box A$	$mRn \Rightarrow \exists o(mRo \& oRn)$	Densa
(C)	$\Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A$	$mRn \& mRp \Rightarrow \exists o(nRo \& pRo)$	Convergente

Na lista de condições sobre os enquadramentos, as variáveis '*m*', '*n*', '*o*', '*p*' e o quantificador ' $\exists o$ ' têm como domínio *M*. '&' abrevia 'e' e ' \Rightarrow ' abrevia 'se...então'.

A noção de correspondência entre os axiomas e condições sobre enquadramentos que está em questão aqui foi explicada na seção anterior. Quando *S* é uma lista de axiomas e *F(S)* é o conjunto correspondente de condições sobre enquadramentos, então *S* corresponde a *F(S)* precisamente quando o sistema *K+S* é adequado (correto e completo) para *F(S)*-validade, isso é, um argumento é demonstrável em *K+S* sse ele é *F(S)*-válido. Várias noções mais fortes de correspondência entre axiomas e condições sobre enquadramentos emergiram da pesquisa sobre lógica modal.

9. O Axioma Geral

A correspondência entre axiomas e condições sobre enquadramentos pode parecer um mistério. Um belo resultado de Lemmon e Scott (1977) explica muito bem esse relacionamento. O teorema deles diz respeito aos axiomas que possuem a seguinte forma:

$$(G) \quad \diamond^h \square^i A \rightarrow \square^j \diamond^k A$$

Utilizamos a notação ' \diamond^n ' para representar uma cadeia de n losangos. Assim, por exemplo, ' \diamond^3 ' abrevia uma cadeia de três losangos: ' $\diamond\diamond\diamond$ '. De forma similar, ' \square^n ' representa uma cadeia de n quadrados. Quando os valores de h, i, j e k são todos 1, temos o axioma (C):

$$(C) \quad \diamond \square A \rightarrow \square \diamond A = \diamond^1 \square^1 A \rightarrow \square^1 \diamond^1 A$$

O axioma (B) resulta de atribuir 0 a h e a i , e atribuir 1 a j e a k :

$$(B) \quad A \rightarrow \square \diamond A = \diamond^0 \square^0 A \rightarrow \square^1 \diamond^1 A$$

Para obter (4), podemos atribuir 0 a h e a k , atribuir 1 a i e 2 a j :

$$(4) \quad \square A \rightarrow \square \square A = \diamond^0 \square^1 A \rightarrow \square^2 \diamond^0 A$$

Muitos (mas não todos) os axiomas da lógica modal podem ser obtidos dando os valores corretos aos parâmetros em (G).

Nossa próxima tarefa será dar as condições sobre enquadramentos que correspondem a (G) para uma dada seleção de valores para h, i, j e k . Para fazê-lo, vamos precisar de uma definição. A composição de duas relações R e R' é uma relação $R \circ R'$ que é definida como se segue:

$$mR \circ R' v \text{ sse para algum } u, mRu \text{ e } uR'v.$$

Por exemplo, se R é a relação de ser um irmão, e R' é a relação de ser um pai ou mãe, então $R \circ R'$ é a relação de ser um tio ou tia, (pois m é o tio de v sse para alguma pessoa u , é o caso que m é o irmão de u e u é pai ou mãe de v). Uma relação pode ser composta consigo própria. Por exemplo, quando R é a relação de ser um pai ou mãe, então $R \circ R$ é a relação de ser um avô ou avó, e $R \circ R \circ R$ é a relação de ser um bisavô ou bisavó. Será útil escrever ' R^n ', para o resultado de compor R consigo própria n vezes. Então R^2 é $R \circ R$, e R^4 é $R \circ R \circ R \circ R$. Vamos considerar que R^1 é R e R^0 é a relação de identidade, isto é, $mR^0 v$ sse $m=v$.

Podemos agora enunciar o resultado de Scott-Lemmon. Ele nos diz que

a condição sobre enquadramentos que corresponde exatamente a um axioma arbitrário da forma (G) é a seguinte.

$$(hijk\text{-Convergência}) mR^h v \ \& \ m'R^i u \Rightarrow \exists x (vR^j x \ \& \ uR^k x)$$

É interessante notar como as condições familiares em R resultam de se atribuir valores para h, i, j e k de acordo com os valores no axioma correspondente. Por exemplo, considere (5). Nesse caso $i=0$, e $h=j=k=1$. Assim, a condição correspondente é

$$mRv \ \& \ mRu \Rightarrow \exists x (vR^0 x \ \& \ uRx).$$

Explicamos que R^0 é a relação de identidade. Assim, se $vR^0 x$ então $v=x$. Mas $\exists x (v=x \ \& \ uRx)$, é equivalente a uRv , e desta forma a condição Euclidiana é obtida:

$$(wRv \ \& \ wRu) \Rightarrow uRv$$

No caso do axioma (4), $h=0$, $i=1$, $j=2$ e $k=0$. Assim a correspondente condição sobre o enquadramento é

$$(m=v \ \& \ mR^2 u) \Rightarrow \exists x (vRx \ \& \ u=x).$$

Resolvendo as identidades obtemos:

$$vR^2 u \Rightarrow vRu$$

Pela definição de R^2 , $vR^2 u$ sse $\exists x (vRx \ \& \ xRu)$, então isso leva a:

$$\exists x (vRx \ \& \ xRu) \Rightarrow vRu,$$

o que pela lógica de predicados, é equivalente à transitividade.

$$vRx \ \& \ xRu \Rightarrow vRu.$$

O leitor pode achar um exercício aprazível verificar como as condições correspondentes saem da $hijk$ -Convergência quando os valores dos parâmetros h, i, j e k são dados por outros axiomas.

Os resultados de Scott-Lemmon fornecem um método rápido para estabelecer resultados sobre o relacionamento entre os axiomas e as correspondentes condições sobre os enquadramentos. Dado que eles mostraram a adequação de qualquer lógica que estende \mathbf{K} pela adição de uma combinação de axiomas da forma (G) com relação aos modelos que satisfazem o conjunto correspondente de condições sobre os enquadramentos, eles forneceram demonstrações de adequação “no atacado” para a maioria dos sistemas na família modal. Sahlqvist (1975) descobriu generalizações importantes do resultado de Scott-Lemmon, cobrindo um escopo muito mais amplo de axiomas.

10. Lógicas da demonstrabilidade

A lógica modal foi útil para clarificar nosso entendimento de resultados centrais a respeito da demonstração nos fundamentos da matemática (Boolos, 1993). As lógicas da demonstrabilidade são sistemas onde as variáveis proposicionais p, q, r , etc. dizem respeito a fórmulas de algum sistema matemático, por exemplo, o sistema **PA** de Peano para a aritmética. (O sistema escolhido para a matemática pode variar, mas assuma que é **PA** para essa discussão). Gödel mostrou que a aritmética possui forte capacidade expressiva. Utilizando códigos numéricos para sentenças aritméticas, ele foi capaz de demonstrar uma correspondência entre sentenças da matemática e fatos sobre quais sentenças são e quais não são demonstráveis em **PA**. Por exemplo, ele demonstrou que há uma sentença C que é verdadeira exatamente quando nenhuma contradição é demonstrável em **PA** e há uma sentença C (a famosa sentença de Gödel) que é verdadeira exatamente quando ela não é demonstrável em **PA**.

Nas lógicas da demonstrabilidade, $\Box p$ é interpretada como uma fórmula (da aritmética) que expressa que o que p denota é demonstrável em **PA**. Usando essa notação, as sentenças das lógicas da demonstrabilidade expressam fatos sobre demonstrabilidade. Suponha que \perp seja uma constante na lógica da demonstrabilidade denotando uma contradição. Então $\sim\Box\perp$ diz que **PA** é consistente e $\Box A \rightarrow A$ diz que **PA** é correto no sentido de que quando **PA** demonstra A , A é de fato verdadeira. Por conseguinte, o quadrado pode ser iterado. Assim, por exemplo, $\Box\sim\Box\perp$ faz a dúvida a asserção de que **PA** é capaz de demonstrar sua própria consistência, e $\sim\Box\perp \rightarrow \sim\Box\sim\Box\perp$ afirma (corretamente como Gödel provou) que se **PA** é consistente então **PA** é incapaz de demonstrar sua própria consistência.

Apesar das lógicas da demonstrabilidade formarem uma família de sistemas aparentados, o sistema **GL** é de longe o mais conhecido. Ele resulta de adicionar o seguinte axioma a **K**:

$$(GL) \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$$

O axioma (4): $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ é demonstrável em **GL**, portanto **GL** é na verdade mais forte que **K4**. Entretanto, axiomas como (M): $\Box A \rightarrow A$, e mesmo o mais fraco (D): $\Box A \rightarrow \Diamond A$ não estão disponíveis (nem são desejáveis) em **GL**. Na lógica da demonstrabilidade, a demonstrabilidade não deve ser tratada como uma forma de necessidade. O motivo é que quando p é demonstrável em um sistema

arbitrário para a matemática **S**, não se segue que p seja verdadeiro, já que **S** pode ser incorreto. Além disso, se p é demonstrável em **S** ($\Box p$) não precisa nem mesmo seguir-se disso que $\sim p$ não possua uma demonstração ($\sim\Box\sim p = \Diamond p$). **S** pode ser inconsistente e, portanto, demonstrar tanto p quanto $\sim p$.

O axioma (*GL*) captura o conteúdo do Teorema de Loeb, um resultado importante nos fundamentos da aritmética. $\Box A \rightarrow A$ diz que **PA** é correto para A , isto é, que se A fosse demonstrada, A seria verdadeira. (Tal assertiva poderia não estar assegurada para um sistema **S** arbitrariamente escolhido, já que A poderia ser demonstrável em **S** e ser falsa.) (*GL*) afirma que se **PA** consegue demonstrar a sentença que postula a correção para uma dada sentença A , então A já é demonstrável em **PA**. O Teorema de Loeb denuncia um certo tipo de modéstia por parte de **PA** (Boolos, 1993, p. 55). **PA** nunca insiste (demonstra) que uma demonstração de A implica na verdade de A , a não ser que **PA** já possua uma demonstração de A para dar suporte a tal afirmação.

Já foi demonstrado que **GL** é adequado para a demonstrabilidade no seguinte sentido. Digamos que uma sentença **GL** é *sempre demonstrável* exatamente quando a sentença da aritmética que ela denota é demonstrável, não importando quais valores são atribuídos às sentenças de **PA**. Então as sentenças demonstráveis de **GL** são exatamente as sentenças que são sempre demonstráveis. Esse resultado de adequação tem sido extremamente útil, já que questões gerais a respeito da demonstrabilidade em **PA** podem ser transformadas em questões mais fáceis sobre o que pode ser demonstrado em **GL**.

GL também pode ser caracterizada com uma semântica de mundos possíveis correta e completa. Uma condição correspondente sobre o enquadramento para caracterizar **GL**-validade é a de que o enquadramento seja transitivo, finito e irreflexivo.

11. Lógica Modal Avançada

As aplicações da lógica modal à matemática e à ciência da computação têm crescido em importância. A lógica da demonstrabilidade é apenas um exemplo dessa tendência. O termo “lógica modal avançada” se refere a uma tradição em pesquisa na lógica modal que é particularmente bem representada em departamentos de matemática e ciência da computação. Essa tradição tem se

entrelaçado à história da lógica modal desde seu início (Goldblatt, 2006). A pesquisa sobre seus relacionamentos com topologia e álgebras representa alguns dos primeiros trabalhos técnicos em lógica modal. Entretanto, o termo 'lógica modal avançada' geralmente se refere a um segundo campo de trabalho desenvolvido desde a metade dos anos 70. Alguns exemplos dos muitos tópicos interessantes tratados neste campo incluem resultados sobre a decidibilidade (se é possível computar se uma fórmula de um dado sistema modal é um teorema) e complexidade (os custos em tempo e memória necessários para computar tais fatos sobre lógicas modais).

12. Bissimulação

A Bissimulação fornece um bom exemplo das relações frutíferas que foram desenvolvidas entre a lógica modal e a ciência da computação. Na ciência da computação, Sistemas de Transição Rotulados (STRs) são comumente utilizados para representar vias computacionais possíveis durante a execução de um programa. STRs são generalizações dos enquadramentos de Kripke, consistindo de um conjunto M de estados, e uma coleção de relações de i -acessibilidade R_i , uma para cada processo computacional i . Intuitivamente, $mR_i m'$ vale exatamente quando m' é um estado que resulta da aplicação do processo i ao estado m .

A linguagem da lógica polimodal ou dinâmica introduz uma coleção de operadores modais \Box_i , um para cada programa i (Harel, 1984). Nesse caso, $\Box_i A$ afirma que a sentença A vale em toda execução do processo i . Assim ideias como a corretude e a terminação bem-sucedida de programas podem ser expressadas nesta linguagem. Modelos para uma tal linguagem são como os modelos de Kripke, exceto que STRs são usados no lugar de enquadramentos. Uma *bissimulação* é uma relação de contraparte entre estados de dois desses modelos tal que exatamente as mesmas variáveis proposicionais são verdadeiras em estados contrapartes, e sempre que o mundo n é i -acessível a um dos estados contrapartes, então a outra contraparte possui a relação de i -acessibilidade a alguma contraparte de n . Em resumo, a estrutura de i -acessibilidade que alguém pode "ver" a partir de um dado estado imita o que se vê a partir de uma contraparte deste estado. A Bissimulação é uma noção mais fraca que o isomorfismo (uma

relação de bissimulação não precisa ser bijetiva), mas é suficiente para garantir equivalência em termos de processamento.

Na década de 70, uma versão da bissimulação já havia sido desenvolvida por lógicos modais para ajudar a entender melhor o relacionamento entre axiomas de lógica modal e as condições correspondentes sobre os enquadramentos de Kripke. A semântica de Kripke fornece uma base para traduzir axiomas modais em sentenças de uma linguagem de segunda ordem na qual a quantificação é permitida sob letras predicativas P com um argumento. Substitua as metavaráveis A por sentenças abertas Px , traduza $\Box Px$ como $\forall y(Rxy \rightarrow Py)$, e feche as variáveis livres x e as letras predicativas unárias P com quantificadores universais. Por exemplo, a tradução na lógica de predicados do axioma esquemático $\Box A \rightarrow A$ é $\forall P \forall x[\forall y (Rxy \rightarrow Py) \rightarrow Px]$. Dada esta tradução, é possível instanciar a variável P por um predicado unário arbitrário, por exemplo o predicado Rx cuja extensão é o conjunto de todos os mundos m tais que Rxm para um dado valor de x . Daí é possível obter $\forall x[\forall y(Rxy \rightarrow Rxy) \rightarrow Rxx]$, o que se reduz a $\forall xRxx$, já que $\forall y(Rxy \rightarrow Rxy)$ é uma tautologia. Isso ilumina a correspondência entre $\Box A \rightarrow A$ e a reflexividade dos enquadramentos ($\forall xRxx$). Resultados similares valem para muitos outros axiomas e condições de enquadramento. O “colapso” das condições axiomáticas de segunda-ordem em termos de condições de primeira-ordem sobre enquadramentos é muito útil para obter resultados de completude para lógicas modais. Por exemplo, essa é a ideia central por trás dos elegantes resultados de Sahlqvist (1975). □

Mas quando é que a tradução em segunda ordem de um axioma se reduz desta maneira a uma condição de primeira ordem sobre R ? Na década de 70, van Benthem mostrou que isso acontece sse a validade da tradução em um modelo implica na sua validade em qualquer modelo bissimilar, onde dois modelos são bissimilares sse há uma bissimulação entre eles no caso especial no qual há uma única relação de acessibilidade. Esse resultado é generalizado facilmente para o caso polimodal (van Benthem 1996, p. 88). Isso sugere que a lógica polimodal está no nível exato de abstração para descrever, e raciocinar sobre a computação e outros processos. (Afim de contas, o que realmente importa ali é a preservação dos valores de verdade das fórmulas em modelos, ao invés de detalhes mais sofisticados sobre a estrutura dos enquadramentos.) Além disso a tradução implícita dessas lógicas em termos de fragmentos bem compreendidos da lógica de predicados fornece uma riqueza de informações de interesse para a ciência da

computação. Como resultado, uma frutífera área de pesquisa na ciência da computação tem sido desenvolvida tendo a bissimulação como sua ideia central (Ponse *et al.* 1995).

13. Quantificadores na Lógica Modal

Pareceria uma questão simples introduzir os quantificadores \forall (todo) e \exists (algum) na lógica modal. Poder-se-ia simplesmente adicionar as regras padrão (clássicas) para quantificadores aos princípios de qualquer lógica proposicional modal. Entretanto, a introdução de quantificadores em lógica modal envolve certas dificuldades. Algumas dessas são filosóficas. Por exemplo, Quine (1953) notoriamente sustentou que a quantificação em contextos modais é simplesmente incoerente, uma visão que originou uma gigantesca literatura. As reclamações de Quine já não carregam o peso que carregavam. (Veja Barcan 1990 para um bom resumo.) Não obstante, a visão de que há algo errado em “quantificar-se em” é ainda vastamente compartilhada. Um segundo tipo de complicação é técnico. Há uma grande variedade de escolhas que se pode fazer na semântica para lógicas modais quantificadas, e a demonstração de que um sistema de regras é apropriado para uma dada escolha pode ser difícil. Os trabalhos de Corsi (2002) e Garson (2005) avançam em direção a trazer unidade neste terreno, mas a situação permanece desafiadora.

Uma outra complicação é a de que alguns lógicos acreditam que a modalidade requer abandonar as regras de quantificação clássica em prol das regras mais fracas da lógica livre (Garson 2001). Os principais pontos de divergência no que diz respeito às regras de quantificação podem ser de fato ligados às decisões sobre como lidar com o domínio de quantificação. A alternativa mais simples, a abordagem do domínio fixo (às vezes chamada de possibilista), assume um domínio único de quantificação que contém todos os objetos possíveis. Por outro lado, a interpretação relativa ao mundo (ou atualista) assume que o domínio da quantificação muda de mundo para mundo, e contém apenas os objetos que são atuais em um dado mundo.

A abordagem do domínio fixo não requer grandes ajustes no maquinário clássico dos quantificadores. As lógicas modais que são adequadas para uma semântica de domínio fixo podem normalmente ser axiomatizadas adicionando

princípios de uma lógica modal proposicional às regras clássicas de quantificação, juntamente com a Fórmula de Barcan (BF) (Barcan 1946). (Para uma explicação de algumas exceções interessantes ver Cresswell (1995)).

$$(BF) \forall x \Box A \rightarrow \Box \forall x A.$$

A interpretação do domínio fixo possui as vantagens da simplicidade e familiaridade, mas não fornece uma explicação direta da semântica de certas expressões quantificadas da linguagem natural. Nós não pensamos que 'Existe um homem que assinou a Declaração de Independência dos EUA' seja verdadeira, pelo menos não se lermos 'existe' no tempo presente. Não obstante, essa sentença foi verdadeira em 1777, o que mostra que o domínio para a expressão da linguagem natural 'Existe um homem que' muda para refletir quais homens existem em diferentes tempos. Um problema relacionado é o de que na interpretação do domínio fixo, a sentença $\forall y \Box \exists x (x=y)$ é válida. Entretanto, assumindo que $\exists x (x=y)$ seja lido como: 'y existe', então $\forall y \Box \exists x (x=y)$ diz que tudo existe necessariamente. No entanto, parece ser uma característica fundamental das ideias mais comuns sobre a modalidade que a existência de muitas coisas é contingente, e que diferentes objetos existem em diferentes mundos possíveis.

O defensor da interpretação do domínio fixo pode responder a essas objeções insistindo que em sua leitura dos quantificadores o domínio da quantificação contém *todos* os objetos possíveis, não apenas os objetos que existem num dado mundo. Assim o teorema $\forall y \Box \exists x (x=y)$ faz a assertiva inócua de que todo objeto *possível* é necessariamente encontrado no domínio de todos os objetos possíveis. Além disso, as expressões quantificadas da linguagem natural cujo domínio é relativo ao mundo (ou momento) podem ser expressadas utilizando o quantificador de domínio fixo x e uma letra predicativa E com a leitura 'atualmente existe'. Por exemplo, ao invés de traduzir 'Existe algum Homem que Assinou a Declaração de Independência dos EUA' por

$$\exists x (Hx \ \& \ Ax)$$

O defensor dos domínios fixos pode escrever:

$$\exists x (Ex \ \& \ Hx \ \& \ Ax),$$

assegurando assim que a tradução é falsa no tempo presente. Cresswell (1991) faz a interessante observação de que a quantificação relativa ao mundo possui poder expressivo limitado em relação à quantificação de domínio fixo. A quantificação relativa ao mundo pode ser definida com quantificadores de domínio fixo e E , mas não há maneira de expressar plenamente quantificadores de domínio

fixo com quantificadores relativos ao mundo. Apesar disso argumentar a favor da abordagem clássica para a lógica modal quantificacional, a tática de tradução também aponta para algo como uma concessão em prol da lógica livre, pois os quantificadores relativos ao mundo assim definidos obedecem exatamente às regras da lógica livre.

Um problema com a estratégia de tradução utilizada por defensores da quantificação de domínio fixo é que interpretar a linguagem natural na lógica é algo menos direto, já que E precisa ser adicionado a todas as traduções de todas as sentenças cujas expressões quantificadas possuem domínios dependentes do contexto. Uma objeção mais séria à quantificação de domínio fixo é que ela retira do quantificador um papel que Quine recomendou para ele, a saber, representar um comprometimento ontológico robusto. Nesta visão, o domínio de $\exists x$ precisa conter apenas entidades que são ontologicamente respeitáveis, e objetos possíveis são abstratos demais para assim merecer tal qualificação. Atualistas desta estirpe vão querer desenvolver a lógica de um quantificador $\exists x$ que reflete comprometimento com o que é atual em um dado mundo, ao invés do que é meramente possível.

Entretanto, os trabalhos recentes sobre o atualismo tendem a solapar tal objeção. Por exemplo, Linsky e Zalta (1994) sustentam que ao quantificador de domínio fixo pode ser dada uma interpretação que é perfeitamente aceitável aos atualistas. Atualistas que empregam semânticas de mundos possíveis rotineiramente quantificam sobre mundos possíveis em sua teoria semântica da linguagem. Pareceria então que mundos possíveis são atuais à luz do atualismo. Povoando o domínio com entidades abstratas não mais objetáveis que as aceitas pelos atualistas, Linsky e Zalta mostram que a Fórmula de Barcan e os princípios clássicos podem ser justificados. Note, entretanto, que atualistas podem responder que não estão comprometidos com a atualidade dos mundos possíveis dado que é entendido que os quantificadores utilizados em suas teorias da linguagem carecem de forte comprometimento ontológico. De qualquer forma, é uma questão aberta para os atualistas (e não atualistas também) investigar a lógica dos quantificadores com domínios mais robustos, por exemplo domínios excluindo mundos possíveis e outras entidades abstratas do gênero, e contendo apenas os particulares espaço-temporais encontrados num dado mundo. Para quantificadores desse tipo, domínios relativos ao mundo são apropriados.

Tais considerações motivam interesse nos sistemas que reconhecem a

dependência do contexto na quantificação pela introdução de domínios relativos ao mundo. Aqui cada mundo possível possui seu próprio domínio de quantificação (o conjunto de objetos que atualmente existem no mundo), e os domínios variam de um mundo para o outro. Quando tal decisão é feita, surge uma dificuldade para a teoria clássica da quantificação. Note que a sentença $\exists x(x=t)$ é um teorema da lógica clássica, e, portanto, $\Box\exists x(x=t)$ é um teorema de **K** pela Regra da Necessitação. Suponha que o termo t denote Saul Kripke. Então o teorema anterior diz que é necessário que Saul Kripke exista, e, portanto, que ele está no domínio de cada mundo possível. Toda a motivação da abordagem relativa ao mundo era a de refletir a ideia de que objetos em um mundo podem não existir em outro mundo. Se as regras de quantificação padrão são utilizadas, entretanto, cada termo t precisa se referir a algo que exista em todos os mundos possíveis. Isso parece incompatível com nossa prática ordinária de usar termos para nos referirmos a coisas que existem apenas contingentemente.

Uma resposta a essa dificuldade é simplesmente eliminar termos. Kripke (1963) deu um exemplo de um sistema que usa interpretação relativa ao mundo e preserva as regras clássicas. Entretanto, os custos são pesados. Primeiramente, a sua linguagem é artificialmente empobrecida, e em segundo lugar, as regras para a lógica modal proposicional precisam ser enfraquecidas.

Presumindo que desejamos uma linguagem que inclui termos, e que regras clássicas sejam adicionadas aos sistemas tradicionais da lógica modal proposicional, um novo problema surge. Em tal sistema, é possível provar (CBF), a recíproca da Fórmula de Barcan.

$$(CBF) \quad \Box\forall xA \rightarrow \forall x\Box A$$

Esse fato possui sérias consequências para a semântica dos sistemas. Não é difícil mostrar que todo modelo relativo ao mundo de (CBF) precisa cumprir a condição (ND) (de 'Domínios aNinhados').

(ND) Se mRn então o domínio de m é um subconjunto do domínio de n .

Entretanto (ND) entra em conflito com a ideia de introduzir domínios relativos ao mundo. A ideia afinal era de que a existência de objetos é contingente e, portanto, há mundos possíveis acessíveis onde algumas coisas no nosso mundo não existem.

Uma solução direta para esses problemas é abandonar as regras clássicas dos quantificadores e ao invés disso adotar regras para lógica livre (FL). As regras de FL coincidem com as regras clássicas, com exceção de que as

inferências de $\forall xRx$ (tudo é atual) para Rp (Pégaso é atual) são bloqueadas. Isso é feito introduzindo o predicado ' E ' (de 'atualmente Existe') e modificando a regra da instanciação universal. De $\forall xRx$ é permitido obter Rp apenas se também já se obteve Ep . Assumindo que o quantificador universal $\forall x$ é primitivo, e o quantificador existencial $\exists x$ é definido por $\exists xA \text{ =df } \sim\forall x\sim A$, então **FL** pode ser construída adicionando os dois princípios seguintes às regras da lógica proposicional

Generalização Universal. Se $B \rightarrow A(y)$ é um teorema, então $B \rightarrow \forall xA(x)$ também o é.

Instanciação Universal. $(\forall xA(x) \ \& \ En) \rightarrow A(n)$

(Aqui é assumido que $A(x)$ é uma fórmula bem formada arbitrária da lógica de predicados, e que $A(y)$ e $A(n)$ resultam de substituir cada ocorrência de x em $A(x)$ por y e n , de forma apropriada.) Note que o princípio da generalização universal é padrão, mas que o axioma da instanciação é restrito pela menção de En no antecedente. Em **FL**, as demonstrações de fórmulas como $\exists x\Box(x=t)$, $\forall y\Box\exists x(x=y)$, (CBF), e (BF), que parecem incompatíveis com a interpretação relativa ao mundo, são bloqueadas.

Uma objeção filosófica a **FL** é que E parece ser um predicado de existência, e muitos iriam sustentar que a existência não é uma propriedade legítima como ser verde ou pesar mais que dois quilos. Assim, os filósofos que rejeitam a ideia de que a existência é um predicado podem objetar a **FL**. Contudo, na maioria (mas não todas) as lógicas modais quantificadas que incluem identidade (=) essas preocupações podem ser contornadas definindo E como se segue.

$Et \text{ =df } \exists x(x=t)$

A maneira mais geral de formular a lógica modal quantificada é criar **FS** adicionando as regras de **FL** a uma dada lógica modal proposicional **S**. Nas situações onde a quantificação clássica é desejada, pode-se simplesmente adicionar Et como um axioma a **FS**, de modo que os princípios clássicos tornam-se regras deriváveis. Os resultados de adequação para tais sistemas podem ser obtidos para a maioria das escolhas da lógica modal **S**, mas há exceções.

Uma complicação final na semântica para lógica modal quantificada merece ser mencionada. Ela surge quando expressões não-rígidas tais como 'o inventor das bifocais' são introduzidas na linguagem. Um termo é não-rígido

quando se refere a diferentes objetos em diferentes mundos possíveis. O valor semântico de tal termo pode ser dado pelo que Carnap (1947) chamou de conceito individual, uma função que escolhe a denotação de um termo para cada mundo possível. Uma abordagem para lidar com termos não-rígidos é empregar a teoria de Russell das descrições definidas. Entretanto, em uma linguagem que trata expressões não-rígidas como termos genuínos, acontece que nem as regras de quantificação da lógica clássica, nem as da lógica livre são aceitáveis. (O problema não pode ser resolvido enfraquecendo a regra da substituição pela identidade.) Uma solução para esse problema é empregar um tratamento mais geral dos quantificadores, no qual o domínio da quantificação contenha conceitos individuais ao invés de objetos. Essa interpretação mais geral fornece um ajuste melhor entre o tratamento dos termos e o tratamento dos quantificadores e resulta em sistemas que são adequados para regras clássicas ou regras de lógica livre (dependendo da escolha entre domínios fixos ou domínios relativos ao mundo).

Referências

Uma excelente bibliografia de fontes históricas pode ser encontrada em Hughes e Cresswell (1968).

- Anderson, A. e Belnap, N., 1975, 1992, *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. 1 (1975), vol. 2 (1992), Princeton: Princeton University Press.
- Barcan (Marcus), R., 1947, "A Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication," *Journal of Symbolic Logic*, 11: 1-16.
- Barcan (Marcus), R., 1967, "Essentialism in Modal Logic," *Noûs*, 1: 91-96.
- Barcan (Marcus), R., 1990, "A Backwards Look at Quine's Animadversions on Modalities," in R. Bartrett and R. Gibson (eds.), *Perspectives on Quine*, Cambridge: Blackwell.
- Bencivenga, E., 1986, "Free Logics," in D. Gabbay and F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 3.6, Dordrecht: D. Reidel.
- Benthem, J. F. van, 1982, *The Logic of Time*, Dordrecht: D. Reidel.
- Benthem, J. F. van, 1983, *Modal Logic and Classical Logic*, Naples: Bibliopolis.
- Benthem, J. F. van, 1996, *Exploring Logical Dynamics*, Stanford: CSLI

Publications.

- Blackburn, P., Rijke, M. de, and Venema, Y., 2001, *Modal Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Blackburn, P., Bentham, J. van, e Wolter, F., 2006, *Handbook of Modal Logic*, Amsterdam: North Holland.
- Bonevac, D., 1987, *Deduction*, Part II, Palo Alto: Mayfield Publishing Company.
- Boolos, G., 1993, *The Logic of Provability*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Bull, R. e Segerberg, Krister, 1984, "Basic Modal Logic," in Gabbay, D., and Guentner, F. (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, 2.1, Dordrecht: D. Reidel.
- Carnap, R., 1947, *Meaning and Necessity*, Chicago: U. Chicago Press.
- Carnielli, W. e Pizzi, C., 2008, *Modalities and Multimodalities*, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Chagrov, A. e Zakharyashev, M., 1997, *Modal Logic*, Oxford: Oxford University Press.
- Chellas, Brian, 1980, *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Cresswell, M. J., 2001, "Modal Logic", in L. Goble (ed.), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Oxford: Blackwell, 136-158.
- Cresswell, M. J., 1995, "Incompleteness and the Barcan formula", *Journal of Philosophical Logic*, 24: 379-403.
- Cresswell, M. J., 1991, "In Defence of the Barcan Formula," *Logique et Analyse*, 135-136: 271-282.
- Corsi, G., 2002, "A Unified Completeness Theorem for Quantified Modal Logics," *Journal of Symbolic Logic*, 67: 1483-1510.
- Fitting, M. e Mendelsohn, R., 1998, *First Order Modal Logic*, Dordrecht: Kluwer.
- Gabbay, D., 1976, *Investigations in Modal and Tense Logics*, Dordrecht: D. Reidel.
- Gabbay, D., 1994, *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, New York: Oxford University Press.
- Garson, J., 2001, "Quantification in Modal Logic," in Gabbay, D., and Guentner, F. (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, 2^a Ed. volume 3, Dordrecht: D. Reidel, 267-323.
- Garson, J., 2005, "Unifying Quantified Modal Logic," *Journal of Philosophical Logic*, 34: 621-649.

- Garson, J., 2006, *Modal Logic for Philosophers*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Goldblatt, R., 1993, *Mathematics of Modality*, CSLI Lecture Notes #43, Chicago: University of Chicago Press.
- Goldblatt, R., 2006, "Mathematical Modal Logic: a View of its Evolution," in D. Gabbay and J. Woods (eds.), *Handbook of the History of Logic*, vol. 6, Amsterdam: Elsevier.
- Harel, D., 1984, "Dynamic Logic," in D. Gabbay and F. Guenther(eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, volume 2, Dordrecht: D. Reidel, 497-604.
- Hintikka, J., 1962, *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*, Ithaca, NY: Cornell University Press.
- Hilpinen, R., 1971, *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*, Dordrecht: D. Reidel.
- Hughes, G. e Cresswell, M., 1968, *An Introduction to Modal Logic*, London: Methuen.
- Hughes, G. e Cresswell, M., 1984, *A Companion to Modal Logic*, London: Methuen.
- Hughes, G. e Cresswell, M., 1996, *A New Introduction to Modal Logic*, London: Routledge.
- Kripke, Saul, 1963, "Semantical Considerations on Modal Logic," *Acta Philosophica Fennica*, 16: 83-94.
- Konyndik, K., 1986, *Introductory Modal Logic*, Notre Dame: University of Notre Dame Press.
- Kvart, I., 1986, *A Theory of Counterfactuals*, Indianapolis: Hackett Publishing Company.
- Lemmon, E. e Scott, D., 1977, *An Introduction to Modal Logic*, Oxford: Blackwell.
- Lewis, C.I. e Langford, C. H., 1959 (1932), *Symbolic Logic*, New York: Dover Publications.
- Lewis, D., 1973, *Counterfactuals*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Linsky, B. e Zalta, E., 1994, "In Defense of the Simplest Quantified Modal Logic," *Philosophical Perspectives*, (Logic and Language), 8: 431-458.
- Mints, G. 1992, *A Short Introduction to Modal Logic*, Chicago: University of Chicago Press.
- Ponse, A., de Rijke, M., e Venema, Y., 1995, *Modal Logic and Process Algebra, A Bisimulation Perspective*, Stanford: CSLI Publications.
- Popkorn, S., 1995, *First Steps in Modal Logic*, Cambridge: Cambridge University

Press.

Prior, A. N., 1957, *Time and Modality*, Oxford: Clarendon Press.

Prior, A. N., 1967, *Past, Present and Future*, Oxford: Clarendon Press.

Quine, W. V. O., 1953, "Reference and Modality", in *From a Logical Point of View*, Cambridge, MA: Harvard University Press. 139-159.

Rescher, N, e Urquhart, A., 1971, *Temporal Logic*, New York: Springer Verlag.

Sahlqvist, H., 1975, "Completeness and Correspondence in First and Second Order Semantics for Modal Logic," in S. Kanger (ed.), *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium*, Amsterdam: North Holland. 110-143.

Zeman, J., 1973, *Modal Logic, The Lewis-Modal Systems*, Oxford: Oxford University Press.

Sobre Tradutores e Revisores

Verbetes (I) A Lógica de Aristóteles

Elton Luiz Rasch (tradutor): Possui graduação (2011) e mestrado (2013) em filosofia pela Universidade Federal de Santa Maria. Atualmente cursa Ciência da Computação (Bacharelado) pela Universidade Federal de Santa Maria, onde também é bolsista PET. Tem como foco de pesquisa os seguintes temas: lógica, conhecimento simbólico, processamento distribuído.

Rogério Passos Severo (revisor): é professor adjunto no Departamento de Filosofia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. PhD em filosofia pela University of Illinois at Chicago. Atua nas áreas de filosofia da ciência, teoria do conhecimento, filosofia da linguagem, metafísica e filosofia da religião.

Frank Thomas Sautter (revisor): Possui graduação em Ciência da Computação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (1988), mestrado em Engenharia Elétrica e Informática Industrial pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (1991), mestrado em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas (1995), doutorado em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas (2000), e pós-doutorado pela Universidad Nacional de La Plata (2013). Atualmente é professor titular da Universidade Federal de Santa Maria. Tem experiência na área de Filosofia, com ênfase em Lógica.

Verbetes (II) Lógica Clássica

Rodrigo Reis Lastra Cid (tradutor): Professor Adjunto de Filosofia na Universidade Federal do Amapá. Pesquisador na área da Metafísica. Editor Chefe do periódico Investigação Filosófica, Editor da Série Investigação Filosófica (NEPFIL/Editora UFPel). Líder do Grupo de Pesquisa Investigação Filosófica (DGP/CNPq), membro do GT de Metafísica Analítica da ANPOF, da Society for the Metaphysics of Science e do Laboratório de Estudos Aplicados em Infoprodutos (UFES/CNPq). Residência Pós-Doutoral em Filosofia realizada na Universidade Federal de Minas Gerais. Doutor e Mestre em Lógica e Metafísica (Filosofia) pelo Programa de Pós-Graduação em Lógica e Metafísica da

Universidade Federal do Rio de Janeiro, com período sanduíche na Université Catholique de Louvain. Bacharel em Filosofia pela Universidade Federal em Ouro Preto. Ex-Professor de Filosofia na Universidade Federal do Rio de Janeiro, no Instituto Federal de Minas Gerais e na Faculdade Dom Luciano Mendes.

Danilo Jose Ribeiro de Oliveira (tradutor): Graduando em Filosofia pela Universidade Federal do Amapá e membro do grupo de pesquisa Investigação Filosófica.

Danilo Fraga Dantas (revisor): Bacharel em Comunicação Social (UFBA), mestre em Comunicação e Cultura Contemporâneas (UFBA), mestre em Filosofia (UFRGS) e doutor em Filosofia (Universidade da Califórnia, Davis). No mestrado em Filosofia, estudou as consequências da existência de falsas lembranças para a epistemologia e metafísica da memória. No doutorado, utilizou modelos formais e computacionais para lidar com questões em epistemologia, como onisciência lógica, concebibilidade, epistemologia Bayesiana, raciocínio não-monotônico, etc. Atualmente, em estágio pós-doutoral na UFSM.

Verbetes (III) Lógica Modal

Heitor Hedler Siqueira Campos (tradutor): Possui Mestrado em Filosofia pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Bacharelado em Filosofia pela mesma instituição. Seus interesses estão centrados nas áreas de Filosofia da Mente, Filosofia da Linguagem, Filosofia do Direito e Filosofia Política, com ênfase nas obras de Gilbert Ryle, Wilfrid Sellars, Robert Nozick e Michael Huemer.

Márcio Moretto Ribeiro (revisor): Possui graduação em Curso de Ciências Moleculares pela Universidade de São Paulo(2006), doutorado em Ciências da Computação pela Universidade de São Paulo(2010) e pós-doutorado pelo Centro de Lógica Epistemologia e História da Ciência(2012). Atualmente é Professor Doutor da Escola de Artes, Ciências e Humanidades - USP. Tem experiência na área de Ciência da Computação, com ênfase em Segurança da Informação. Atuando principalmente nos seguintes temas:Lógicas de Descrição, Revisão de Crenças.

Joao Marcos de Almeida (revisor): João Marcos atua na área de Lógica, é doutor em Matemática pelo Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa e em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas. Atualmente é professor associado do Departamento de Informática e Matemática Aplicada da UFRN (Brasil), e parceiro do Security and Quantum Information Group (SQIG) / IT (Portugal).



Editora
UFPel

DISSERTATIO
FILOSOFIA